# Треугольник

Учитель математики МБОУ лицей г.Владикавказ

Сатцаева Нонна Ефимовна

Как показывают результаты ОГЭ и ЕГЭ, за решение геометрических задач берётся низкий процент выпускников, что свидетельствует о трудности восприятия условия таких задач и выполнения чертежей к ним.

Между тем развитое пространственное представление и воображение необходимо не только специалистам, непосредственно связанным с геометрией, но и любому рядовому гражданину: окружающий нас мир структурно является геометрическим.

Обучаясь правильно изображать пространственные фигуры, ученик знакомится с законами восприятия окружающих его предметов, приобретает необходимые практические навыки, формирует свои пространственные представления.

Решение пространственных задач по геометрии, как правило, требует выполнения чертежа, и от того, насколько правильно он сделан, во многом зависит успешность получения результата.

В современных условиях в рамках подготовки учащихся к выпускным экзаменам за курсы основной и средней школы предлагается много различных пособий.

В плане системной подготовки по геометрии к экзамену (ОГЭ, ЕГЭ) особо продуктивно будет повторение вопросов теории на одной задаче, в которой предусмотрено нахождение всех возможных элементов, а, следовательно, повторение всех необходимых формул, приёмов решения.

**Этапы решение геометрических задач.**

1) Чтение условия задачи.
2) Выполнение чертежа с буквенными обозначениями.
3) Краткая запись условия задачи (формирование базы данных).
4) Перенос данных условия на чертёж; выделение элементов чертежа различными цветами.
5) Запись требуемых формул и теорем на черновике (формирование базы знаний).
6) «Деталировка» – вычерчивание отдельных деталей на дополнительных чертежах.
7) Анализ данных задачи, привязка искомых величин элементам чертежа.
8) «Синтез» – составление «цепочки» действий (алгоритма решения).
9) Реализация алгоритма решения.
10) Проверка правильности решения.
11) Запись ответа.

Одна из основных фигур геометрии – это **треугольник**. Решение даже самых сложных математических задач обычно сводится к решению нескольких простых, где хотя бы одна из полученных новых задач будет задачей на треугольники.

Чтобы успешно решать задачи на треугольники необходимо усвоить несколько основных правил.

**Во-первых**, необходимо усвоить основные теоремы. Не зная признаков равенства и подобия треугольников невозможно научиться решать геометрические задачи.

**Во-вторых**, приступая к решению очередной задачи, делайте чертеж, чтобы представить ситуацию зрительно. Подписывайте на нем известные длины сторон, величины углов.

**В-третьих**, выучите некоторые полезные теоремы и следствия из них. К таким теоремам относятся:

теорема синусов, в которой говорится, что длины сторон любого треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов;

теорема косинусов, о том, что квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

**В-четвертых**, не забывайте о четырех замечательных точках и линиях треугольника и их свойствах. Так, три медианы пересекаются в одной точке. Точка пересечения делит каждую медиану в отношении 2 к 1, считая от вершины. Биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке – центре вписанной в данный треугольник окружности.

**В-пятых**, не забывайте о соотношениях между элементами в прямоугольном треугольнике, а так же о теореме Пифагора. Именно она ваш главный помощник в решении геометрических задач.

Давайте вспомним все, что изучают в школьном курсе геометрии о треугольнике.

**Определение: треугольником** называется геометрическая фигура, состоящая из трех , не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, последовательно соединяющих эти точки.

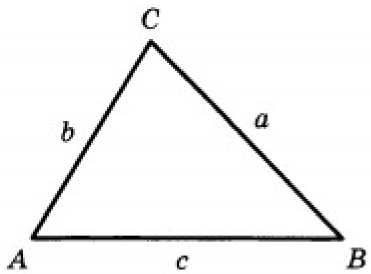



Рис. 1

Точки A, B, C – вершины $\Delta ABC$

Отрезки AB,BC и AB – стороны $\Delta ABC$

$\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$ – углы.

Стороны треугольника часто обозначают малыми латинскими буквами:

AB = c, BC = a, AC = b.

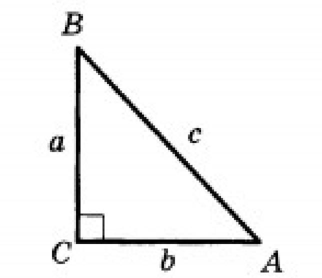
P = a+b+c – периметр треугольника.

## Неравенство треугольника

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон:

$a < b+c$, $b < a+c$, $c < a+b$.

Треугольник, у которого все углы острые, называется **остроугольным** (рис.1).



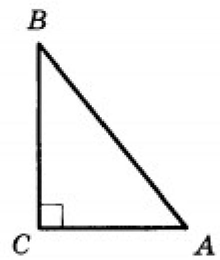

Треугольник, у которого угол прямой, называется **прямоугольным** (рис.2).

Стороны, образующие прямой угол, называются **катетами** (a и b), а сторона ,лежащая против прямого угла, - **гипотенузой** (c).

Рис.2

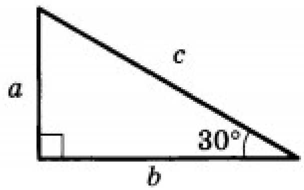
## Некоторые свойства прямоугольного треугольника

1) Сумма острых углов равна 90°.



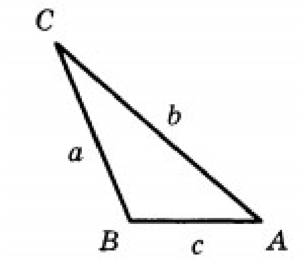
$\angle A + \angle B = 90°$ (рис.3)

2) Катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.




$a = \frac{1}{2} c$

3) Если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета равен половине гипотенузы




Треугольник с тупым углом называется **тупоугольным** (рис.3)

Рис.3

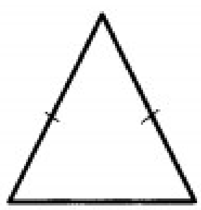
**Определение вида треугольника по его сторонам**

Пусть с наибольшая сторона, тогда:

а) если $c^2 < a^2 + b^2$, то треугольник остроугольный;

б) если $c^2 > a^2 + b^2$, то треугольник тупоугольный;

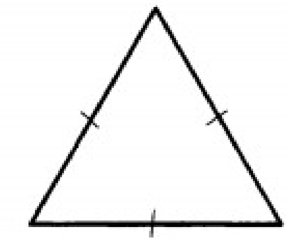
в) если $c^2 = a^2 + b^2$, то треугольник прямоугольный.



Треугольник, у которого две стороны равны, называется **равнобедренным** (рис.4).

Равные стороны называются **боковыми**, а третья сторона - **основанием** равнобедренного треугольника.

Рис.4



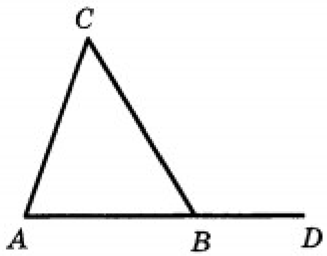
Треугольник, у которого все стороны равны, называется **равносторонним** (рис.5).

Каждый угол равностороннего треугольника равен  60°.

Рис. 5

**Свойства равнобедренного треугольника:**

1. Углы при основании равны.
2. Биссектриса, проведенная к основанию, является одновременно медианой и высотой.
3. Высота, проведенная к основанию, является одновременно медианой и биссектрисой.
4. Медиана, проведенная к основанию, является  одновременно высотой и биссектрисой.

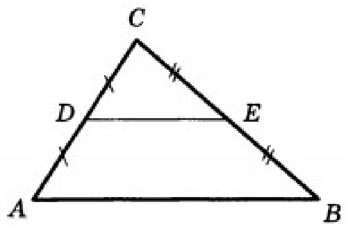



Внешним углом треугольника, называется угол смежный с каким-нибудь углом этого треугольника (рис.6).

$\angle CBD$ – внешний угол треугольника.

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним: $\angle CBD = \angle A + \angle B$.

Рис.6




Отрезок, соединяющий середины двух сторон, называется средней линией треугольника (рис.7).

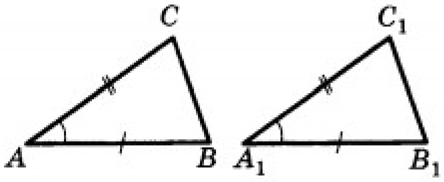
Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна ее половине: $DE \| AB$, $DE = \frac{1}{2}AB$.

Рис.7

**Признаки равенства треугольников**

**1 признак** (по двум сторонам и углу между ними)

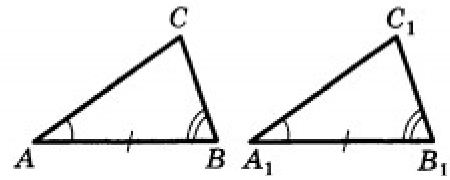
Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.




Если $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$, то $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$.

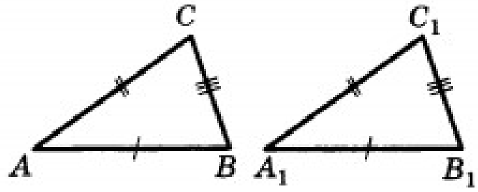
**2 признак** (по стороне и прилежащим к ней углам)

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.




Если $AB=A_1B_1$, $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, то $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$.

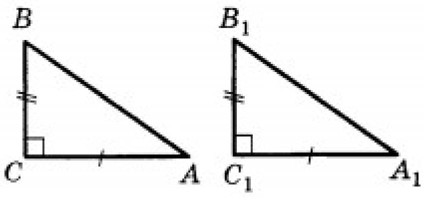
**3 признак** ( по трем сторонам)
Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам тругого треугольника, то такие треугольники равны.




Если $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $AC=A_1C_1$, , то $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$.

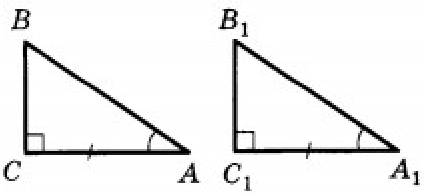
**Признаки равенства прямоугольных треугольников**

1. **Если катеты** одного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны.




Если $BC=B_1C_1$, $AC=A_1C_1$, то $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$.

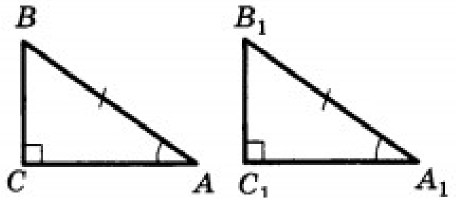
2) **Если катет и прилежащий к нему острый угол** одного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему углу другого, то такие треугольники равны.




Если $AC=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$, то

$\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$.

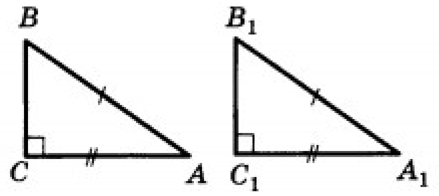
3) **Если гипотенуза и острый угол** одного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны.




Если $AB=A_1B_1$, $\angle A=\angle A_1$, то

$\Delta$ ABC=$\Delta A_1B_1C_1$.

**4) Если гипотенуза и катет** одного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны.

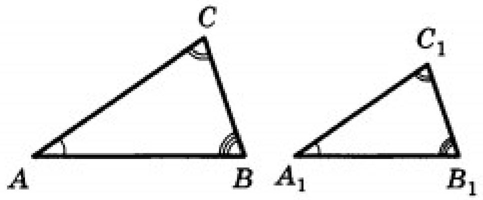



Если AB=$A_1B_1$, AC=$A_1C_1$, , то

$\Delta$ABC=$\Delta A_1B_1C_1$.

**Подобные треугольники**

**Определение:** Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.




AB и $A_1B_1$, AC и $A_1C_1$, BC и $B_1C_1$ - **сходственные стороны.**

Из подобия треугольников следует:

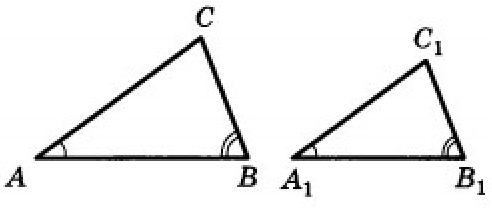
$\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$, $\frac{AB}{A_1B_!}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=k$, где $k$- коэффициент подобия.

Обозначение: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Если два треугольника подобны, то отношение их площадей равно $k^2$ т.е $S_{\Delta ABC} : S_{\Delta A_1BC_1} = k^2$.

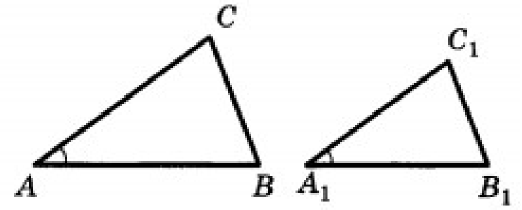
**Признаки подобия треугольников.**

**1 признак:** если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.



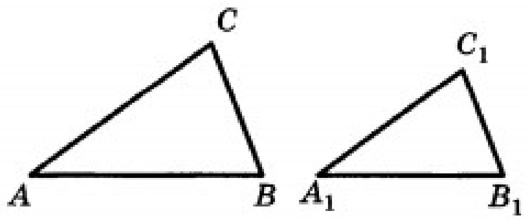

Если $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

**2 признак:** если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами равны, то такие треугольники подобны.




Если $\angle A = \angle A_1$, и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

**3 признак:** если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.




Если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

**Четыре замечательные точки треугольника**

С каждым треугольником связаны 4 точки:

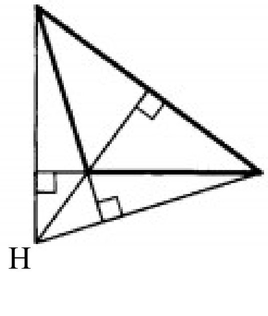
1) точка пересечения медиан;

2) точка пересечение биссектрис,

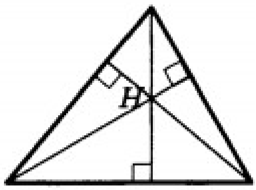
3) точка пересечения высот (или их продолжений);

4) точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам.

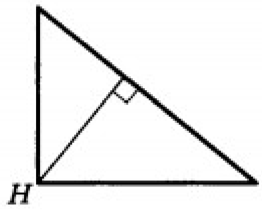
Эти четыре точки называются **замечательными токами треугольника.**
**Высотой** треугольника называется длина перпендикуляра, опущенного из любой его вершины на противоположную сторону или на ее продолжение.
**В тупоугольном** треугольнике две высоты падают на продолжение сторон и лежат вне треугольника, а третья внутри.



**В остроугольном** треугольнике все три высоты лежат внутри треугольника.




В прямоугольном треугольнике катеты одновременно служат и высотами.



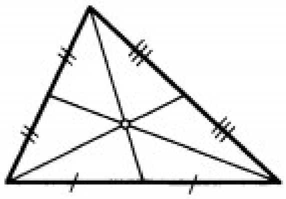

**Три высоты** треугольника всегда пересекаются в одной точке, называемой **ортоцентром.**

**В тупоугольном** треугольнике ортоцентр лежит вне треугольника.

**В прямоугольном** треугольнике он совпадает с вершиной прямого угла

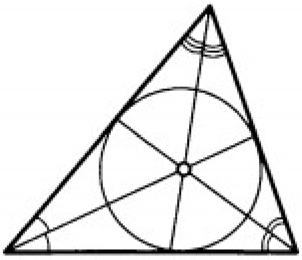
**Медианой** треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

**Три медианы** треугольника пересекаются в одной точке, которая является **центром тяжести треугольника.**

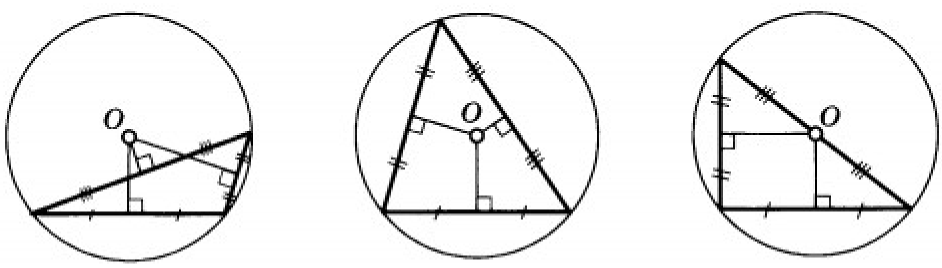


Эта точка делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от соответствующей вершины.

**Три биссектрисы** треугольника пересекаются в одной точке, которая является **центром вписанного круга.**



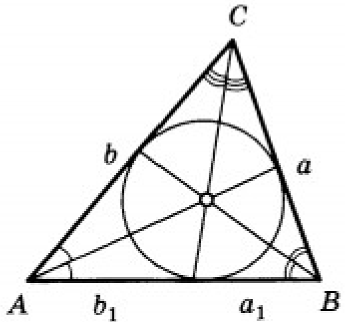
**Три перпендикуляра** к сторонам треугольника, проведенные через их середины пересекаются в одной точке, которая является **центром описанной окружности.**



В тупоугольном треугольнике эта точка лежит **вне** треугольника, в остроугольном – **внутри**, в прямоугольном – **на середине гипотенузы**.

Ортоцентр, центр тяжести, центр вписанной и описанной окружностей совпадают друг с другом только в **равностороннем** треугольнике.

## Произвольный треугольник.




1) Свойство биссектрисы внутри угла треугольника:

$$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}.$$

2) Длина биссектрисы: $l_c=\sqrt{ab-a_1b_1}$;

$$l_c=\frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

3) Длина медианы: $m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$.

4) Длина высоты: $h_c=\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $a,b,c$ - стороны треугольника,

$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ - полупериметр, $h_c$ - высота, проведенная к стороне $c$.

5) Зависимость между сторонами и высотами:

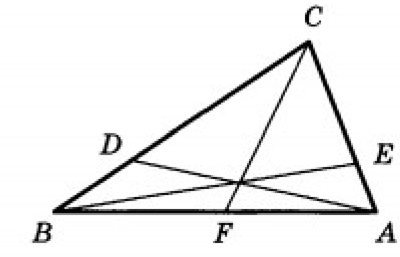
$$h_a:h_b:h_c=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}.$$

6) Зависимость между высотами и радиусом вписанной окружности:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}.$$

## Теорема Чевы

Для того чтобы прямые $BE, AD$ и $CF$ пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}=\frac{AF}{FB}=1$

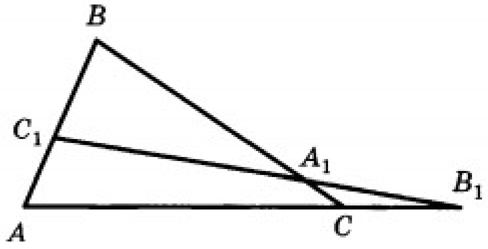



**Теорема Менелая**

Если на сторонах BC, AB и продолжении стороны AC $\Delta ABC$ за точку C отмечены соответственно точки $A_1$, $C_1$ и $B_1$, лежащие на одной прямой, то

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

.




**Теорема синусов**

В любом треугольнике стороны пропорциональны синусам противолежащих углов:

$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$, где R – радиус окружности, описанной около треугольника.

**Теорема косинусов**

Квадрат одной стороны произвольного треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$,

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$,

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$.

**Площадь треугольника**

1) $S=\frac{1}{2}ah_a$;

2) $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$ ;

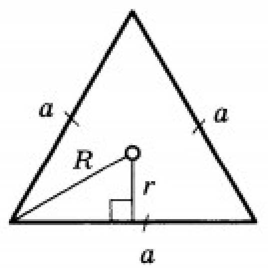
3) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ , где $p=\frac{a+b+c}{2}$ - формула Герона;

4) $S=pr$ , где $p=\frac{a+b+c}{2}$ , $r$- радиус вписанной в треугольник окружности;

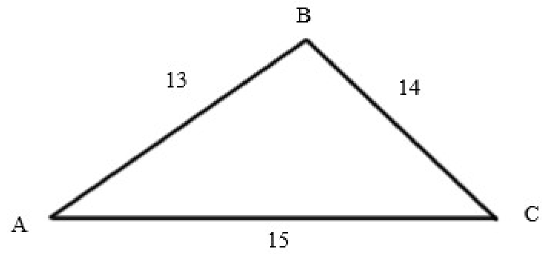
5) $S=\frac{abc}{4R}$ , где R – радиус, описанной около треугольника окружности;

6) $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ - площадь равностороннего треугольника.

**Равносторонний (правильный) треугольник**




**Задача**.




Дано: ΔABC
AB=c=13см
BC=a=14см
AC=b =15см
Найти:
1) $S_{\Delta ABC}$ ;
2) $h_b-$ высоту BD ;
3) r - радиус вписанной окружности;
4) величину наибольшего внутреннего угла ΔABC;
5)R- радиус описанной окружности ;
6) $m_b$ – длину медианы BF;
7)$L_b$- длину биссектрисы BE угла B (точка E лежит на отрезке AC);
8) расстояние между точкой пересечения медиан G и центром описанной окружности $O_o$ ;
9) расстояние между центрами вписанной $O_в$ и описанной окружностей $O_o$ .

**Решение:**

**1) Вычисление площади треугольника.**

База знаний. Выпишем формулы для вычисления площади треугольника:

1) $S=\frac{1}{2}ah_a;$

2) $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$ ;

3) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ , где $p=\frac{a+b+c}{2}$ - формула Герона;

4) $S=pr$ , где $p=\frac{a+b+c}{2}$ , $r$- радиус вписанной в треугольник окружности;

5) $S=\frac{abc}{4R}$ , где R – радиус, описанной около треугольника окружности;

6) $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ - площадь равностороннего треугольника.

Так как по условию задачи даны только длины сторон треугольника, удобнее всего находить площадь треугольника по формуле Герона.

Вычислим сначала полупериметр треугольника:

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{13+14+15}{2}=21(см)$$

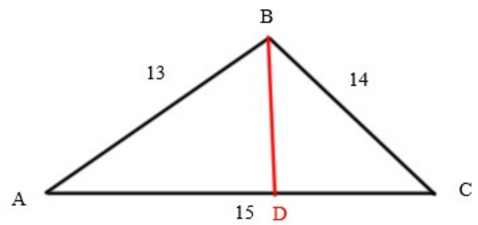
, тогда по формуле Герона

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}=\sqrt{21\cdot8\cdot7\cdot6}=84(см^2)$$

**2) Вычисление высоты треугольника.**

Используем формулу

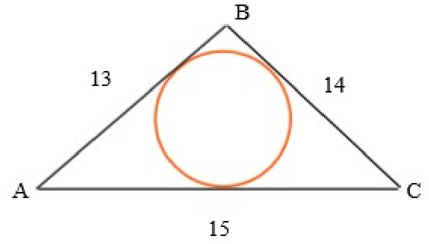
$$S=\frac{1}{2}bh_b;$$




Так как известны площадь ΔABC и длина стороны AC, то можем найти высоту $BD=h_b$

$$h_b=\frac{2S}{b}=\frac{2\cdot84}{15}=11{,}2(см)$$ .

3) Вычисление радиуса вписанной окружности



Для вычисления радиуса вписанной окружности r воспользуемся формулой вычисления площади треугольника $S = pr$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$,

$$r = \frac{S}{p} = \frac{84}{21} = 4(см)$$

**4) Вычисление наибольшего угла треугольника.**

Мы знаем, что в треугольнике против большей стороны лежит больший угол. В нашем случае, наибольшая сторона AC, значит, наибольший угол $\angle$B. Его можно найти используя формулу для вычисления площади треугольника

$S = \frac{1}{2} ac \sin B$. Отсюда $\sin B = \frac{2S}{ac} = \frac{2 \cdot 84}{13 \cdot 14} = \frac{12}{13}$, $\angle B = \arcsin \frac{12}{13}$

**5) Вычисление радиуса описанной окружности.**

Вычислить радиус описанной окружности около треугольника можно использую теорему синусов

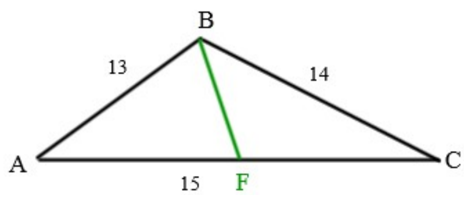
$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$ или формулу для вычисления площади треугольника

$S = \frac{abc}{4R}$, где R – радиус, описанной около треугольника окружности.

По теореме синусов имеем: $R = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{15 \cdot 13}{2 \cdot 12} = \frac{65}{8}(см)$, используя формулу площади треугольника: $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = \frac{65}{8}(см)$

**6) Вычисление длины медианы треугольника.**

Построим медиану BF и вычислим ее длину mb .

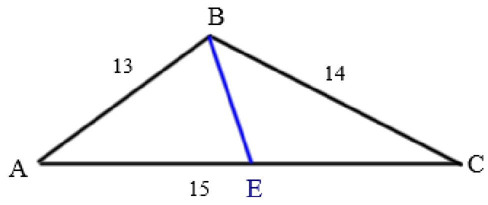



$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2(14^2+13^2)-15^2} = \frac{\sqrt{505}}{2}$$

.

7) Вычисление длины биссектрисы треугольника.

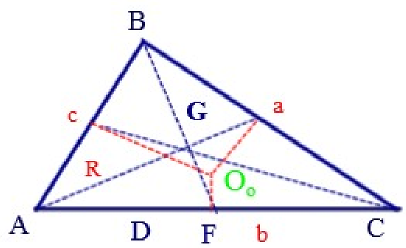
Построим биссектрису BE =Lb.




$$l_c=\frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}=\frac{\sqrt{13\cdot 14(13+14+15)(13+14-15)}}{13+14}=\frac{\sqrt{13\cdot 14\cdot 42\cdot 12}}{27}=\frac{28\sqrt{13}}{9}(см)$$

**8) Вычисление расстояния между точкой пересечения медиан G и центром описанной окружности $O_o$.**

Обозначим G – точку пересечения медиан треугольника ABC, $O_o$- центр описанной окружности.




$$GO_{o^2}=R^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{9}=\left(\frac{65}{8}\right)^2-\frac{13^2+14^2+15^2}{9}=\frac{4225}{64}-\frac{169+196+225}{9}=\frac{4225}{64}-\frac{590}{9}=$$
$$¿\frac{4225\cdot 9-590\cdot 64}{64\cdot 9}=\frac{38025-37760}{64\cdot 9}=\frac{265}{64\cdot 9},$$

$$GO=\frac{\sqrt{265}}{24}$$ .

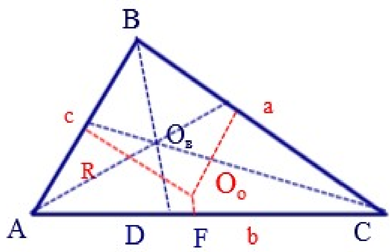
9) Вычисление расстояния между центрами вписанной $O_в$ и описанной окружностей $O_o$ .

Мы знаем, что центр вписанной окружности $O_в$ - это точка пересечения биссектрис, а центр описанной окружности $O_o$ – точка пересечения серединных перпендикуляров.

$$O_в O_{o^2}=R^2-2Rr$$ ,

где R – радиус описанной окружности

r – радиус вписанной окружности



$$O_в O_о = \frac{\sqrt{65}}{8}$$