Метод рационализации

Учитель математики МБОУ лицей г.Владикавказ

Сатцаева Нонна Ефимовна

Нередко в заданиях ЕГЭ типа 15 (C_3) требуется решить неравенство, которое сложно поддается обычному методу интервалов: корни не всегда очевидны, а вычисление значений функции в промежуточных точках может оказаться довольно трудоемким процессом.

Есть метод сведения неравенств к неравенствам для рациональных функций, которые решаются, как правило, существенно проще. Речь идет о методе рационализации. Решение этим методом неравенств сэкономит время и снизит риск вычислительной ошибки.

Метод рационализации — это весьма мощная процедура, позволяющая в определённых случаях упростить неравенство и свести его к рациональному неравенству (которое решается методом интервалов).

Рассмотрим, как свести действия, по замене одного выражения другим практически до автоматизма, как обойтись без лишних технических «заморочек» и детального анализа выражения каждого типа.

1. **Рассмотри неравенство с модулями**. $|f|-|g|>0$ (можем взять любой знак)
   Так как модуль определен для любого числа, то говорить о области допустимых значений не нужно.

   Умножим обе части данного неравенства на положительное число $|f|+|g|$

   $(|f|-|g|)\cdot(|f|+|g|)>0$ Перед нами разность квадратов

   $(|f|^2-|g|^2>0)$, так как $|f|^2=f^2$, $|g|^2=g^2$

   $f^2-g^2>0$, т.е. $(f-g)\cdot(f+g)>0$

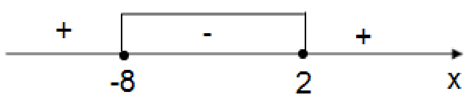
   Итак, $|f|-|g|>0$ **равносильно** $(f-g)\cdot(f+g)>0$

Пример: $|x+3|\le 5$

$$|x+3|-5\le 0$$

$$(x+3-5)(x+3+5)\le 0$$

$$(x-2)(x+8)\le 0$$



Ответ: $x\in[-8;2]$.

`

Пример 2. $|3x-2| \ge |x^2+3x+7|$

Запишем в виде разности $|3x-2|-|x^2+3x+7| \ge 0$

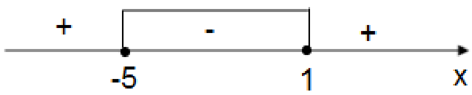
$$(x^2+3x+7-3x+2)\cdot(x^2+3x+7+3x-2) \le 0$$

$$(x^2+9)\cdot(x^2+6x+5) \le 0 \quad ,$$

$x^2+9>0$, при любом значении *x***,**

$$x^2+6x+5 \le 0$$

$$x_1=-1 \qquad x_2=-5$$



Ответ: $x \in [-5;1]$.

Рассмотрим случай, когда в выражении $|f|-|g|>0$ $g=0$, тогда $|f| \vee 0$ и $f^2 \vee 0$.

Рассмотрим неравенства следующего вида $\sqrt{f}-\sqrt{g} \le 0$. Начнем с области допустимых значений.

ОДЗ: $\left|f \ge 0, ¿¿¿¿\right.$

Умножим обе части на сумму корней $\sqrt{f}+\sqrt{g}$:

$$(\sqrt{f}-\sqrt{g})\cdot(\sqrt{f}+\sqrt{g}) \le 0$$

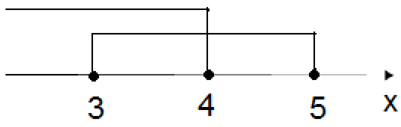
$$(\sqrt{f})^2-(\sqrt{g})^2 \le 0$$

$$f-g \le 0$$

Итак, $\sqrt{f}-\sqrt{g} \le 0$ равносильно $\left|f-g \le 0, ¿ \left|f \ge 0, ¿¿¿¿\right.\right.$

Пример. $\sqrt{x-3}\le\sqrt{5-x}$; $\sqrt{x-3}-\sqrt{5-x}\le 0$

$$\{x-3-5+x\le 0,¿\{x-3\ge 0,¿¿¿¿$$



Ответ: $x\in[3;4]$.

Пример. $\dfrac{\sqrt[4]{x^2+2x+8}-\sqrt{x+8}}{\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{x-4}}\le 0.$

ОДЗ: $\{x^2+2x+8\ge 0,¿\{x+8\ge 0,¿¿¿¿$

Преобразуем числитель дроби:

$$\sqrt[4]{x^2+2x+8}-\sqrt{x+8}=\sqrt[4]{x^2+2x+8}-\sqrt[4]{(x+8)^2}$$

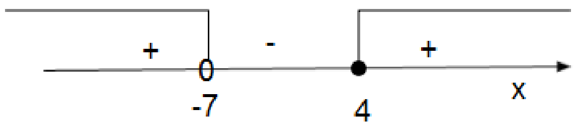
Знак числителя будет совпадать со знаком разности:

$x^2+2x+8-(x^2+16x+64)=x^2+2x+8-x^2-16x-64=-14x-56=-14(x+4)$, т.е. со знаком $-(x+4)$

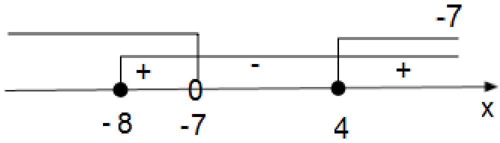
Аналогично, преобразуем знаменатель дроби. Знак знаменателя дроби $\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{x-4}$ совпадает со знаком разности $2x+4-x+4=x+7$.

Итак, исходное неравенство равносильно неравенству :

$\dfrac{-(x+4)}{(x+7)}\le 0,$ $\dfrac{(x+4)}{(x+7)}\le 0,$



С учетом ОДЗ:



Ответ: $x\in[-8;-7)\cup[4;+\infty)$.

Рассмотрим следующий тип неравенств, которые можно решить методом рационализации.

$a^f - a^g > 0$. ОДЗ: $a>0,$ ¿¿¿¿

Решаем обычным способом.

$a^f > a^g \Leftrightarrow$ ¿ $0<a<1,$ ¿¿¿¿ Перепишем в виде ¿ $a-1<0,$ ¿¿¿¿¿

Заметим, что разности $a-1$ и $f-g$,должны быть одновременно либо меньше нуля, либо больше нуля. Это возможно только в том случае, если произведение этих разностей будет строго больше нуля. То есть: $(a-1)\cdot(f-g)>0$.

Замечание. В исходном неравенстве знак >0, и в замене знак >0. Если бы в исходном неравенстве был бы знак <0, то и в замене был бы <0.

Итак: $a^f - a^g \vee 0 \Leftrightarrow (a-1)\cdot(f-g) \vee 0$.

Частный случай:

1) пусть $a^g = 1$, т.е. $a^f - 1 \vee 0;$ $a^f - a^0 \vee 0 \Leftrightarrow (a-1)\cdot f \vee 0$.

   Итак, $a^f - 1 \vee 0 \Leftrightarrow (a-1)\cdot f \vee 0$

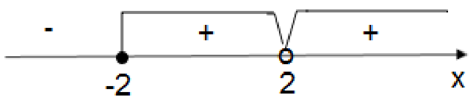
2) $a^f - b^f \vee 0 \Leftrightarrow (a-b)\cdot f \vee 0$

Пример. $\dfrac{5^{x^2-4} - 8^{x^2-4}}{x-2}$ ¿ $0.$ ОДЗ: $x \neq 2$

Преобразуем числитель дроби: $\dfrac{(5-8)\cdot(x^2-4)}{x-2} \leq 0$

$$\frac{x^2-4}{x-2} \geq 0$$

$$\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x-2} \geq 0$$



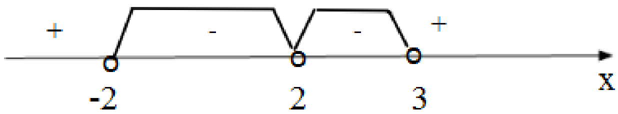
Ответ: $[-2;2)\cup(2;+\infty)$.

Пример: $\frac{\sqrt{x^2+1}}{3^{x^2+4}-9^{2x}} ¿ \frac{\sqrt{x+7}}{3^{x^2+4}-81^x}$.

ОДЗ: $\{x^2+1\geq 0, ¿ \{x+7\geq 0, ¿¿¿¿$

Перепишем неравенство в виде: $\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+7}}{3^{x^2+4}-3^{4x}} ¿ 0$, знак данного неравенства совпадает со знаком следующего $\frac{x^2+1-x-7}{(3-1)\cdot(x^2+4-4x)}<0$

$$\frac{x^2-x-6}{(x-2)^2}<0$$



$(-2;2)\cup(2;3)$

Данный промежуток входит в ОДЗ.

Ответ: $(-2;2)\cup(2;3)$.

Следующий тип неравенств: логарифмические неравенства.

$\log_a f-\log_a g>0$ ОДЗ: $a>0, a\neq 1,$ $f>0, g>0.$

Решим обычным способом.

$$\log_a f>\log_a g$$

$$[\ \{0<a<1, ¿¿¿¿¿$$
$$¿$$

Замечание. В исходном неравенстве знак >0, и в замене знак >0. Если бы в исходном неравенстве был бы знак <0, то и в замене был бы <0.

Итак: $\log_a f-\log_a g\vee 0\Leftrightarrow(a-1)\cdot(f-g)\vee 0$, где $a>0, a\neq 1, f>0, g>0.$

Частные случаи:

1. $\log_a f-1\vee 0$; $\log_a f-\log_a a\vee 0\Leftrightarrow(a-1)\cdot(f-a)$, где $a>0, a\neq 1, f>0.$

   Итак: $\log_a f-1\vee 0\Leftrightarrow(a-1)\cdot(f-a)$.

2. $\log_a f>0$, $\log_a f-\log_a 1\vee 0\Leftrightarrow(a-1)\cdot(f-1)$,где $a>0, a\neq 1, f>0.$

Итак: $\log_a f \vee 0 \Leftrightarrow (a-1)\cdot(f-1)$

3. $\log_a f + \log_a g \vee 0$, $\log_a f - \log_a \frac{1}{g} > 0 \Leftrightarrow (a-1)\cdot\left(f-\frac{1}{g}\right)\vee 0$, где $a>0, a\neq 1, f>0, g>0$.

Итак: $$\log_a f + \log_a g \vee 0 \Leftrightarrow (a-1)\cdot\left(f-\frac{1}{g}\right)\vee 0$$

4. $\log_a f - \log_b f \vee 0 \Leftrightarrow (a-1)(b-1)(f-1)(b-a)$, где $a>0, a\neq 1, b>0, b\neq 1, f>0$.

Пример: $\log_{x^2}(x^2+4) - \log_{x^2} 2x+3 \geq 0$.

ОДЗ: $\begin{cases} x^2>0, \\ x^2\neq 1, \\ x^2+4>0, \end{cases}$ $x\in(-1{,}5;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$.

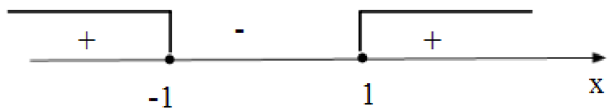
Знак данного неравенства совпадает со знаком следующего неравенства:

$(x^2-1)\cdot(x^2+4-2x-3)\geq 0$

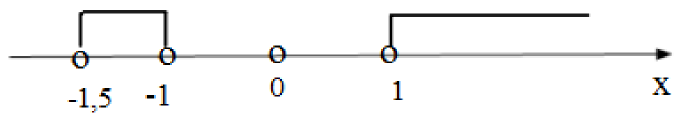
$(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2-2x+1)\geq 0$

$(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)^2\geq 0$

$(x-1)^3(x+1)\geq 0$.



С учетом ОДЗ:



Ответ: $x\in(-1{,}5;-1)\cup(1;+\infty)$.

Пример: $$\frac{\log_4 x^2 + \log_4 \frac{1}{5x-6}}{(x-2)\cdot\log_3(2x+1)} > 0.$$

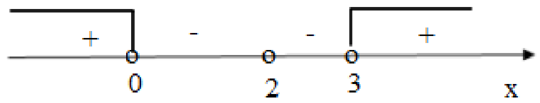
ОДЗ: $\begin{cases} x^2>0, \\ x-2\neq 0, \\ 2x+1>0, \\ 5x-6>0, \end{cases}$

Преобразуем исходное неравенство

$$\frac{\log_4 x^2 - \log_4 (5x-6)}{(x-2)\cdot\log_3(2x+1)} > 0$$

$$\frac{(4-1)\cdot(x^2-5x+6)}{(x-2)\cdot(3-1)\cdot(2x+1-1)} > 0$$

$$\frac{(x-2)\cdot(x-3)}{(x-2)\,x} > 0$$



С учетом ОДЗ: $x \in (3;+\infty)$.