# **Модель урока по математике**

Учитель. Назарова Л.В. Школа: МКОУ СОШ п. Индустриальный Екатериновского района Саратовской области

Класс 11.

Тема: «Угол между прямой и плоскостью».

Тип урока: повторение, обобщение и систематизация знаний.

Цели урока:

<u>Образовательная</u>: обобщить, систематизировать знания учащихся об углах между прямой и плоскостью; продолжить формирование умений и навыков в в решении задач по данной теме.

<u>Развивающая</u>: углубление знаний, умений и навыков, знакомство с различными методами (геометрическим, векторно-координатнм, методом дополнительных построений); развитие творческой деятельности: интуиции, пространственного воображения, смекалки.

<u>Воспитательная</u>: приучать к эстетическому оформлению записи в тетради, прививать аккуратность и трудолюбие.

## **I. Устная работа**

1. Дайте определение перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

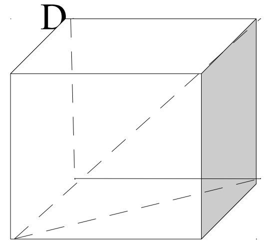
*2.* Справедливо ли утверждение, что прямая, пересекающая плоскость круга в центре круга и перпендикулярная его радиусу, перпендикулярна, плоскости круга? Ответ поясните.

3 . К плоскости прямоугольника в точке пересечения диагоналей восстановлен перпендикуляр. Верно ли утверждение, что произвольная его точка будет равноудалена от вершин прямоугольника? Почему?

3 . Найдите диагональ куба, ребро которого равно 1.

5.Найдите геометрическое место точек, одинаково удаленных от трех точек, не принадлежащих одной прямой.

## II. Воспроизведение и коррекция опорных знаний




а) Учитель: Найти угол
между диагональю $AC_1$, куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$
и диагональю нижнего основания AC.

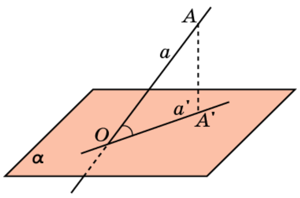
Нетрудно видеть, что тангенс искомого угла будет равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

б) *Н*айти угол между ребром *$CC_1$ и AC.* Это прямой угол.

Учитель: Как определить углы между $AC_1$, и плоскостью грани ABC, между $CC_1$ и той же плоскостью.

Считают, что прямая, перпендикулярная плоскости, образует с этой плоскостью прямой угол.

*2.Определение.*




Углом между наклонной и плоскостью называется угол между наклонной и ее ортогональной проекцией на эту плоскость.

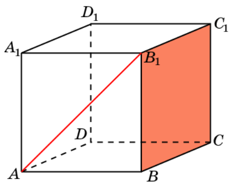
*3.Определение.* Проектирование в направлении прямой, перпендикулярной плоскости проекций, называется ортогональным.

Удобно пользоваться обозначением: $M = Пр_{\alpha}$ ¿ $(M')$.

Ортогональное проектирование является частным случаем параллельного и обладает всеми его свойствами. Однако, если при параллельном проектировании, не являющемся ортогональным, длина проекции отрезка может быть меньше, больше или равна длине самого отрезка, то при ортогональном проектировании длина проекции отрезка не больше чем длина самого отрезка, и длины этих отрезков связаны соотношением

$Пр_{\alpha}$ ¿ $(AB) = |AS|*\cos\phi$ , где $\phi$ - величина угла между прямой AB и плоскостью проекций *a*.

## III . Решение опорных задач




1) Назовите плоскости перпендикулярные ребру куба?

($AD$ ¿ $DD_1C_1C$, $AD$ ¿ $ABB_1A_1$)

2) $D_1C$ - диагональ.

Построить плоскость перпендикулярную $D_1C$.

(построение: $AD$ ¿ $D_1C$ $\Rightarrow$ $DC_1B_1$ ¿ $D_1C$.

$DC_1$ ¿ $D_1C$

3) Докажите, что $A_1C$ ¿ $B_1D_1A$

Доказательство. Докажем, что

а)$A_1C$ ¿ $AD_1$

б)$A_1C$ ¿ $B_1D_1$

При доказательстве перпендикулярности прямой и плоскости, как правило, используется теорема о трех перпендикулярах.

а)Спроектируем $A_1C$ на плоскость $AD_1D$. *Пр* $_\alpha$ ¿ $A_1C= A_1D$, т.к. $A_1D$ ¿ $AD_1$ => $A_1C$ ¿ $AD_1$

б)Докажем, что $A_1C$ ¿ $B_1D_1$ : $\beta= (A_1B_1C_1D_1)$ Пр $_\beta$ ¿ $A_1C= A_1C_1$, т.к. $A_1C_1$ ¿ $B_1D_1$ => $A_1C$ ¿ $B_1D_1$

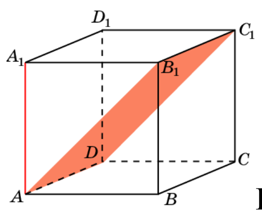
4) Построить точку пересечения прямой $A_1C$ с плоскостью $B_1D_1A_1$/

1 шаг. Необходимо построить плоскость содержащую данную прямою.

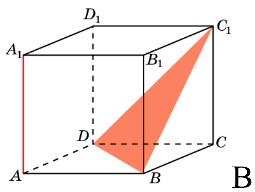
2шаг. Построить линию пересечения данной и построенной плоскостей.

3шаг. Найти точку пересечения построенной и данной прямой.

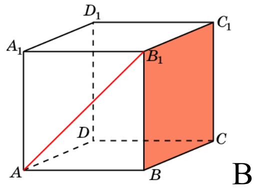
## IV. III . Решение опорных задач



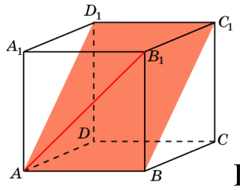

В кубе $A…D1$ найдите угол между прямой и плоскостью $AA1$ и $AB1C1$.



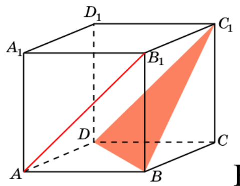

В кубе $A…D1$ найдите угол между прямой и плоскостью $AA1$ и $BC1D$.



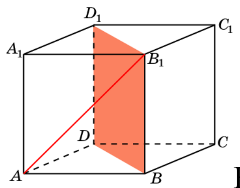

В кубе $A\ldots D1$ найдите угол между прямой и плоскостью $AB1$ и $BCC1$.



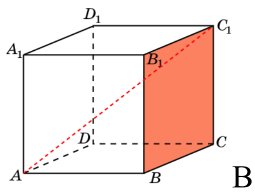

В кубе $A\ldots D1$ найдите угол между прямой и плоскостью $AB1$ и $ABC1$.



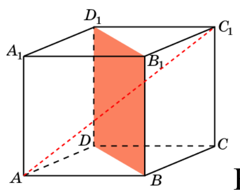

В кубе $A\ldots D1$ найдите угол между прямой и плоскостью $AB1$ и $BC1D$.



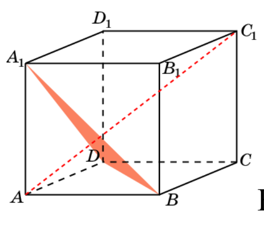

В кубе $A\ldots D1$ найдите угол между прямой и плоскостью $AB1$ и $BB1D1$.




В кубе $A\ldots D1$ найдите угол между прямой и плоскостью $AC1$ и $BCC1$.



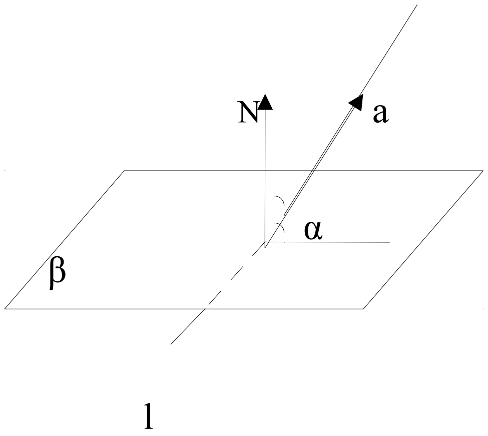

В кубе $A\ldots D1$ найдите угол между прямой и плоскостью $AC1$ и $BB1D1$.




В кубе $A\ldots D1$ найдите угол между прямой и плоскостью $AC1$ и $BA1D$.

**V . Решение задач используя различные методы.**

1. <u>Векторно-координатный метод решения задач.</u>




Вектор $\vec{N} \perp \beta$, угол $\alpha$, угол между прямой 1 и плоскостью $\beta$.

cos (N ,a) = cos (90 - α) = sin α

$$\sin\ \alpha = \frac{N*a}{|N|*|a|} \quad (1)$$

Устный диктант.

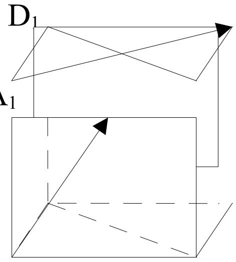
1) Назвать общее уравнение плоскости. (Ax + By + Cz + D = 0?
2) Геометрический смысл коэффициентов общего уравнения плоскости? ( N(A,B,C) перпендикулярен плоскости.)
3) Пусть вектор $N \perp \beta$, вектор a || 1 . найдите угол между прямой и плоскостью. ($\alpha$ = 90 - (N ,a) => $\sin\ \alpha = \dfrac{N*a}{|N|*|a|}$

**Задача 1.**

В кубе $A \ldots D1$ точка E - середина ребра $A_1B_1$. D1

C1

Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью B D $D_1$. A1



Решение.

Вектор $\vec{A_1C_1}$ перпендикулярен плоскости

C

($BB_1D_1$), вектор $\vec{AE}$ || прямой AE. A

B

a – угол между прямой AE и плоскостью ($BB_1D_1$).

$$\sin\alpha = \frac{\vec{AE}\cdot\vec{A_1C_1}}{¿\vec{AE}\vee\cdot\vee\vec{A_1C_1}\vee¿¿}$$

Если есть три взаимно перпендикулярных ребра, то можно ввести систему координат.

$\vec{DA}$||оси OX

$\vec{DC}$|| оси OY

$\vec{DD_1}$|| оси OZ

точка D(0;0;0) обозначим $|DD_1|$ =Z > 0

По нашему выбору координат точка A(1;0;0), E(1;1/2;1), $A_1(1;0;1)$, $C_1(0;1;1)$

$\vec{AE}$ {0;1/2;1} $\text{¿}\vec{AE}| = \sqrt{0+\frac{1}{4}+1} = \sqrt{\frac{5}{4}}\ \text{¿}\frac{\sqrt{5}}{2}$ ;

$\vec{A_1C_1}$ {-1;1;0} $\text{¿}\vec{A_1C_1}| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$ .

$$\sin\alpha = \text{¿}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\sqrt{2}}\text{¿} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{10}$

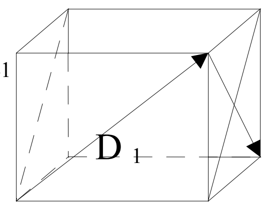
**Задача 2**

В кубе $A\ldots D1$ найдите угол между прямой $AB_1$ и плоскостью $ABC_1$.

Решение.

$D_1$

$C_1$




Вектор $\vec{CD_1}$ перпендикулярен плоскости ($ABC_1$),

вектор $AB_1$ || прямой $AB_1$ ,

α – угол между прямой $AB_1$ и плоскостью ($ABC_1$).

Для нахождения угла α используем формулу (1).

$A_1$

C

Запишем её для наших векторов.

A B

$$\sin\alpha = \frac{\vec{AB_1}\cdot\vec{CB_1}}{\text{¿}\vec{AB_1}\vee\cdot\vee\vec{CB_1}\vee\text{¿}}\text{¿}$$

Чтобы найти координаты векторов и их абсолютные величины, введём систему координат.

Пусть $\vec{DA}||\text{оси } OX$

$\vec{DC}$|| оси OY

$\vec{DD_1}$|| оси OZ

Точка D(0;0;0) обозначим $|DD_1|$ =Z > 0, по нашему выбору координат точка A(1;0;0), C(0;1;0), $B_1(1;1;1)$.

$\vec{AB_1}\{0;1;1\}$, $\text{¿}\vec{AB_1}\vee\text{¿} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\vec{CB_1}\{1;0;1\}$, $\text{¿}\vec{CB_1}\vee\text{¿} = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$,

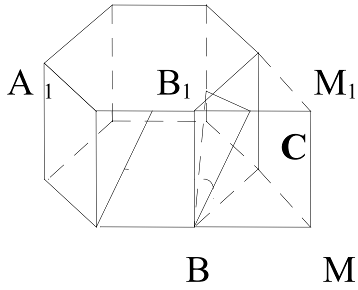
$\sin\alpha = \text{¿}\frac{1}{\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}}\text{¿} = \frac{1}{2}$ , $\alpha = 30°$. Ответ: $30^0$.

## 2. Метод дополнительных построений.

**Задача 3.**

В правильной шестиугольной призме A…$F_1$, все ребра которой равны 1, точка G – середина ребра $A_1B_1$. Найдите синус угла между прямой AG и плоскостью $BCC_1$.

<u>Решение</u>




Достроим треугольную призму $BMCB_1M_1C_1$.

Основание призмы равносторонний треугольник. Построим прямую $BG_1$ || прямой AG. Угол между прямой AG и плоскостью $BCC_1$ - есть угол между прямой $BG_1$ и плоскостью $(BCC_1)$.

Построим ортогональную проекцию прямой AG на плоскость $(BCC_1)$.

*Пр* $_\alpha$ ¿ $BG_1$= BK, т.к. $G_1K$ ¿ $(BCC_1)$. Угол $G_1BB_1 = \alpha$.

Из треугольника $BG_1B_1$ - прямоугольный, ¿ $G_1B_1B = 90^0 \Rightarrow \sin\alpha = G_1B_1 : BG_1$.

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{10}$. Ответ: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{10}$.

**Домашнее задание** (карточки с разно уровневыми задачами, которые нужно решить различными методами: координатно-векторным методом, методом дополнительных построений и геометрическим).