# Лекция для учеников 10 класса «Периодические функции, их свойства»

Многие знают, что такое периодическая функция. Для изучения ее свойств давайте вспомним ее строгое определение.

## Определение 1.

*Функция* ***f(x)****, определенная хотя бы в одной точке, называется периодической, если существует такое число* ***T≠0*** *(называемое периодом), что для любого* ***x*** *из области определения этой функции:*

*а) числа* ***x-T*** *и* ***x+T*** *также принадлежат ее области определения;*

*б)* ***f(x+T)=f(x-T)=f(x)****.*

1) Рассмотрим функцию $\sin\left(\sqrt{x}\right)^2$. Ее область определения ***x0***, и для любого ***x*** из области определения

$$\sin\left(\sqrt{x+2\pi}\right)^2=\sin\left(\sqrt{x}\right)^2.$$

Вместе с тем $-2\pi$ не будет ее периодом, т. к. левее ***x=0*** функция $\sin\left(\sqrt{x}\right)^2$ не определена и, например, $\sin\left(\sqrt{0-2\pi}\right)$ не существует. По определению эта функция не периодическая.

2) В курсе алгебры 10 класса существуют такие задания:

***а)*** *Доказать, что число* ***T*** *является периодом функции* ***f****, если* $f(x)=\sin\frac{x}{2}$, $T=4\pi$.

***Доказательство:*** *для* $\forall\ x\in D(f)$ *и чисел* $x-4\pi$ *и* $x+4\pi$ *должно быть справедливо равенство:*

$$\sin\left(\frac{1}{2}\left(x+4\pi\right)\right)=\sin\left(\frac{1}{2}\left(x-4\pi\right)\right)=\sin\frac{x}{2},$$

*действительно:*

$$\sin\left(\frac{1}{2}(x+4\pi)\right)=\sin\left(\frac{x}{2}+2\pi\right)=\sin\frac{x}{2},$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}(x-4\pi)\right)=\sin\left(\frac{x}{2}-2\pi\right)=-\sin\left(2\pi-\frac{x}{2}\right)=\sin\frac{x}{2},$$

*значит,* $T=4\pi$ *– период функции* $y=\sin\frac{x}{2}$.

б*) Ддоказать, что функция* $f(x)=2-\cos x$ *является периодической и найти ее период.*

***Доказательство:*** *для любого* **x** *и любого* $T\neq 0$ *и чисел* **x+T** *и* **x-T** *из* **D(f)**, *где* $f(x)=2-\cos x$, *должно выполняться равенство:*

$$2-\cos(x+T)=2-\cos(x-T)=2\cos x \qquad (1)$$

*в частности и для* **x=0** *оно должно выполняться, т. е.*

$$2-\cos 0=2-\cos(0+T),$$

$$2-1=2-\cos T,$$

$$\cos T=1,$$

$$T=2\pi.$$

*При* $T=2\pi$ *равенство (1) выполняется, значит, функция периодическая с периодом* $T=2\pi$.

*в)* $f(x)=\sin x+\cos x$.

*Для* $\forall x$ *из* **D(f)**, $T\neq 0$ *должно выполняться*

$$\sin x+\cos x=\sin(x+T)+\cos(x+T)=\sin(x-T)+\cos(x-T) \qquad (*).$$

*Для x=0 оно тоже должно выполняться, т. е.*

$$\sin 0+\cos 0=\sin(0+T)+\cos(0+T),$$

$$1=\sin T+\cos T \qquad (1)$$

*и*

$$\sin 0+\cos 0=\sin(0-T)+\cos(0-T),$$

$$1=\sin(-T)+\cos(-T),$$

$$1=-\sin T+\cos T \qquad (2)$$

*Сложим (1) и (2), получим:*

$$2\cos T=2,$$

$$\cos T = 1,$$

$$T = 2\pi.$$

*При* $T = 2\pi$ *будет справедливо равенство (*), значит,* $f(x) = \sin x + \cos x$ *– периодическая с* $T = 2\pi$.

## Определение 2.

*Наименьший положительный период функции **f(x)** называется **основным периодом.***

Заметим, что число $\boldsymbol{0}$ является периодом любой функции и

1) если функция $f$ периодична и имеет период $T$, то функция $Af(kx+b)$, где $A$, $k$, $b$ – постоянны, а $k \neq 0$, также периодична и имеет период $\dfrac{T}{|k|}$.

Для $\sin(kx+b)$, $\cos(kx+b)$ $T = \dfrac{2\pi}{|k|}$,

для $tg(kx+b)$, $ctg(kx+b)$ $T = \dfrac{\pi}{|k|}$.

# Свойства периодических функций

Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определены на всей числовой прямой и являются периодическими, где $T_1 > 0$ – период $f_1(x)$, $T_2 > 0$ – период $f_2(x)$, причем $T_1$ и $T_2$ таковы, что число $\frac{T_1}{T_2}$ является рациональным, то функция $f_1(x) + f_2(x)$ – периодическая.

Аналогичные утверждения верны для <u>разности</u> и <u>произведения</u>.

Например:

*а) узнать периодическая или нет функция* $y = \sin x + \sin \pi x$.

***<u>Решение:</u>*** $f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = \sin \pi x.$

$$T_1 = 2\pi, \qquad T_2 = \frac{2\pi}{\pi} = 2, \qquad \frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi}{2} = 2$$ *– рациональное,*

*значит, функция периодическая.*

*б) узнать периодическая или нет функция* $y = \cos x \cdot \cos\sqrt{2}x$.

***<u>Решение:</u>*** $f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = \cos\sqrt{2}x.$

$$T_1 = 2\pi, \; T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi, \; \frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}\pi} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$ *– иррациональное число,*

*значит, функция непериодическая.*

*в) узнать периодическая или нет функция* $y = \sin\sqrt{2}x + \cos\sqrt{2}x$.

***<u>Решение:</u>*** $f_1(x) = \sin\sqrt{2}x, \quad f_2(x) = \cos\sqrt{2}x.$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}, \qquad T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}.$$

$T_1$ *и* $T_2$ *– иррациональные числа, значит, функция непериодическая.*

# Нахождение периодов суммы, произведения.

I. Чтобы найти период суммы (произведения), надо найти:

1) период каждого слагаемого (множителя);
2) привести полученные периоды к общему знаменателю;
3) найти НОК числителей периодов слагаемых;
4) разделить НОК на общий знаменатель, частное и будет искомым периодом.

***Пример 1.*** *Найти период функции* $y = \sin x + \sin 3x$.

***Решение:*** *1)* $T_1 = 2\pi, \quad T_2 = \frac{2\pi}{3}$;

*2)* $T_1 = 2\pi = \frac{6\pi}{3}$;

*3) НОК* ($6\pi$; $2\pi$)=$6\pi$;

*4)* $T = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$.

***Ответ:*** $2\pi$.

***Пример 2.*** *Найти период функции* $y = tgx + tg2x + tg3x$.

***Решение:*** *1)* $T_1 = \pi, \quad T_2 = \frac{\pi}{2}, \quad T_3 = \frac{\pi}{3}$;

*2)* $T_1 = \frac{6\pi}{6}, \quad T_2 = \frac{3\pi}{6}, \quad T_3 = \frac{2\pi}{6}$;

*3) НОК* ($6\pi$; $3\pi$; $2\pi$)=$6\pi$;

*4)* $T = \frac{6\pi}{6} = \pi$.

***Ответ:*** $\pi$.

Аналогично можно найти периоды для функций:

*1)* $y = \sin x + \sin\frac{x}{3} + \sin\frac{x}{5}$;

*2)* $y = 5\cos 3x + 7\cos 3x$;

*3)* $y = \sin\sqrt{3}x + \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + tg7\sqrt{3}x$;

*4)* $y = \sin\frac{4}{5}x + 3\cos\frac{7}{8}x + \cos 5x$ $\quad (T = 80\pi)$ *и др.*

***Пример 3.*** *Найти период функции* $f(x) = tg\frac{x}{3} \cdot \cos x$.

***Решение:*** *1)* $T_1 = \frac{\pi}{\frac{1}{3}} = 3\pi$;

*2)* $T_2 = 2\pi$;

*3) НОК* $(3\pi; 2\pi) = 6\pi$;

*4)* $T = \frac{6\pi}{1} = 6\pi$.

***Ответ:*** $6\pi$.

## II. Методы решения задач на нахождение периодов функций

### *1 метод: «используй определение».*

Блок-схема:

Например:

$$f(x)$$

$$\downarrow$$

$$f(x+T)$$

$$\downarrow$$

$$f(x)=f(x+T)$$

$$\downarrow$$

$x_0$ – *выбрать удобное значение* $x = x_0$

$$\downarrow$$

$f(x_0+T)$ – *решить уравнение относительно* $T$ *и из найденных ответов найти период* $T$.

*Найти период функции* $y = \sin x + \sin \pi x$ *по определению.*

***Решение:*** **1)** *для* $\forall x$, $\forall T \neq 0$ *и чисел* $x+T$ *и* $x-T$ *из* $D(f)$, *должно выполняться равенство:*

$$\sin 2(x+T) = \sin 2x \qquad (*),$$

*пусть* $x = 0$ *или* $\pi$ *или* $2\pi$ *и др., то*

$$\sin 0 = \sin 2T, \sin 2T = 0, 2T = \pi n, T = \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

**2)** *проверим этого кандидата периода* $T = \frac{\pi n}{2}$ *при* $n = 1$, *т. е.*

$T = \frac{\pi}{2}$:

$$\sin 2x = \sin 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

*пусть* $x = \frac{\pi}{4}$ *(можно любой), получим*

$\sin 2\frac{\pi}{4} = \sin 2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\frac{\pi}{2} = \sin\frac{3\pi}{2}$, $1 \neq -1$ , *значит* $T = \frac{\pi}{2}$ *не будет периодом.*

*3) при* $n = 2$ , $T = \frac{\pi \cdot 2}{2} = \pi$, *подставив в* $(*)$*, получим:*

$\sin 2 \cdot \pi = \sin 2\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right)$, $\sin\frac{\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right)$, $1 = 1$, *– верно, значит* $T = \pi$ .

***Ответ:*** $T = \pi$ .

## 2 метод: «примени формулу, определяющую функцию несколько раз».

***Пример 1.*** *Функция* $f$ *определена на* $R$ *и при всех* $x \in R$ *удовлетворяет тождеству* $f(x+5) = -f(x)$. *Доказать, что эта функция является периодической.*

***Доказательство:*** *Т.к.* $f$ *определена на* $R$ *, то первый признак определения выполняется для любого* $T \neq 0$ *. Для завершения доказательства достаточно доказать наличие такого* $T \neq 0$ *, что* $f(x+T) = f(x)$. *Использовать определение не удается, поэтому возникает необходимость в другом методе.*

*Из условия ясно, что* $T = 5$ *не является периодом (если* $f(x) \neq 0$ *) и то, что период связан с числом* **5**. *Обратимся к правой части таким образом:* $f((x+5)+5) = f(x+10)$ *, а по условию* $f(x+5) = -f(x)$ *, тогда :*

$f((x+5)+5) = -f(x+5)$ *, заменим* $f(x+5)$ *значением* $f(x)$ *, т.е.* $-f(x+5)$ *получим* $-f(x+5) = -(-f(x))$ *, и окончательно:*

$f((x+5)+5) = f(x+10) = -f(x+5) = -(-f(x)) = f(x)$ *, значит, по определению функция является периодической с периодом* $T = 10$ .

***<u>Пример 2.</u>*** *Доказать, что функция* $f(x+3)=\dfrac{1}{f(x)}$ *является периодической и найти ее период.*

***<u>Доказательство:</u>*** $f((x+3)+3)=\dfrac{1}{f(x+3)}$, *но* $f(x+3)=\dfrac{1}{f(x)}$, *следовательно,*

$$\frac{1}{f(x+3)}=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}=f(x)$$ *, т. е.*

$\boldsymbol{f(x+6)=f(x)}$ *, значит,* $\boldsymbol{T=6}$ .