Фаляхова А.З.
учитель математики первой квалификационной категории
МБОУ «Лицей №35»
г.Нижнекамск

Как учить поиску решения задач

Современное общество ставит человека перед необходимостью находить и принимать решения в различных жизненных и производственных ситуациях. Производство почти ежедневно требует от начальника цеха, инженера, рабочего безотлагательно найти правильное решение. Нахождение решений важно и в семейной жизни, и в быту. От того будет ли выпускник школы знать методы поиска решений и обладать навыками их нахождения, зависит его психологическая подготовленность к общественной жизни.

Методы нахождения решения и психическая деятельность, связанная с поиском решения, во многом сходны как в жизненных или производственных задачах, так и в школьных. Поэтому ознакомление учащихся с методами поиска решений является средством не только улучшения учебных навыков, но и воспитания учащихся, подготовки их к будущей производственной деятельности, к жизни.

Важнейшими элементами любого метода поиска решения являются анализ и синтез. При решении математических задач синтез может использоваться в двух формах рассуждения: «а» - когда двигаются от данных к искомым фактам и «б» - когда элементы объединяют в одно целое. Точно так же и анализ может выступать в двух формах: «а» - когда в рассуждениях двигаются от искомых к данным задачи, «б» - когда целое (фигуру, выражение и т.п.) расчленяют на части.

Синтез, проведенный в форме постепенного «восхождения» от данных к искомому, позволяет изложить уже найденное решение четко и логично: из данных делается один вывод, затем другой, из них логически следует третий и т.д., а в конце цепочки выводов получается то, что требовалось вычислить, узнать или доказать. Это позволяет убедить слушающего в правильности,

логической безупречности решения. Однако ученику, который слушает решение, не всегда понятно, как он сам мог бы до этого догадаться. При синтетическом изложении «за кадром» остается вопрос о том, почему был выбран именно этот путь рассуждения и как (при самостоятельном поиске) избежать ложных шажков мысли. Можно сказать, что изложение решения следует законам математической логики, а не «математической психологии», позволяющей научить делать пусть маленькие, но открытия.

Анализ же в первую очередь направлен на поиск пути решения. После завершения анализа нередко требуется заново провести синтетическое рассуждение, чтобы оформить и изложить найденное решение. Но зато анализ позволяет показать ученику, как можно самому догадаться решить задачу. Он в большой мере способствует развитию мышления и творческих способностей.

Пример 1. При доказательстве тождества

$\cos 20^0 \cdot \cos 40° \cdot \cos 80° = \frac{1}{8}$

$\cos 20^0 * \cos 40^0 * \cos 80^0 = 1/8$

применяется синтез в форме «а», т.е. в форме постепенного перехода от данных (от стоящего в левой части выражения) к искомому доказательству. С этой целью учитель умножает и делит выражение в левой части на $\sin 20^0$, т.е переписывает его в виде

$$\frac{\sin 20^0 \cdot \cos 20^0 \cdot \cos 40° \cdot \cos 80^0}{\sin 20^0}$$

$\sin 20^0 * \cos 20^0 * \cos 40^0 * \cos 80^0 / \sin 20^0$

Ученики догадываются, что теперь нужно применить формулу синуса двойного аргумента, и последовательно переписывают выражение в виде:

$$\frac{\sin 40^0 \cdot \cos 40^0 \cdot \cos 80^0}{2 \sin 20^0} = \frac{\sin 80^0 \cdot \cos 80^0}{4 \sin 20^0} = \frac{\sin 160^0}{8 \sin 20^0}$$

$\sin 40^0 * \cos 40^0 * \cos 80^0 / 2\sin 20^0 = \sin 80^0 * \cos 80^0 / 4\sin 20^0 = \sin 160^0 / 8\sin 20^0$.

Заметив, наконец, что

$\sin 160^0 = \sin(180^0 - 20^0) = \sin 20^0$,

они убеждаются в справедливости исходного равенства.

Приведенное выше рассуждение воспринимается учащимися сначала с недоумением (как догадаться, что нужно умножить и разделить на $\sin 20^0$?), а по его завершении – с восторгом. Формула 2sinα cosα = sin2α, которая, казалось бы, совершенно никакого отношения к постановке задачи не имеет, неожиданно приводит к простому и красивому доказательству.

В заключении остановлюсь еще на одном моменте, который играет важную роль в процессе поиска решения. Во время раздумья над возможными путями решения задачи учащемуся пришел в голову некоторый «шажок мысли». Правильным ли он является? Приближает к нахождению решения, или же это ложный путь, уводящий в сторону от правильного направления? Критерием в этом вопросе является прогнозирование, т.е. предвидение результата, получаемого в процессе анализа, синтеза, обобщения. Формирование умения прогнозировать, предвидеть результаты, к которым приведет каждый отдельный шажок мысли, является важным компонентом развития мышления. С этой целью на уроках математики при обсуждении идеи решения, когда кто-либо из учащихся предлагает воспользоваться той или иной формулой, теоремой, тождественным преобразованием, целесообразно добиваться того, чтобы он обосновывал разумность своего предложения и хотя бы в общих чертах указывал, к чему оно приведет.

Пример 2. Доказать тождество

$$1 + 2cos7x = \frac{sin10{,}5x}{sin3{,}5x}.$$

1+2cos7x=sin10,5x/sin3,5x

Обсудим учебную ситуацию, возникшую в классе при решении этой задачи. Один из учащихся предложил заменить 3,5x через α; тогда 7x=2 α, 10,5x=3 α. Кроме того, он предложил освободиться от знаменателя, чтобы уравнение приняло вид …=sin3 α, где слева стоит какое-то выражение от α и 2 α. После этого второй ученик посчитал целесообразным разложить правую часть по формуле sin(2 α+ α) и объяснил, что при этом уменьшится число аргументов: не будет 3 α, а следовательно и справа останутся α и 2 α. Учащиеся считали, что

оба шага, выполненные один за другим, могут приблизить к решению, хотя еще не все детали предстоящих преобразований им были достаточно ясны.

Вызванный к доске учащийся реализовал путь, указанный в процессе прогнозирования:

$(1+2\cos 2\alpha)\sin\alpha=\sin 3\alpha$,

$(1+2\cos 2\alpha)\sin\alpha=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha$.

Дальнейшие шаги были ясны учащимся, поэтому решение легко было доведено до конца, а при преобразованиях выяснялась целесообразность использования формулы $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$.

Следует отметить, что прогнозирование связано с приобретением опыта решения задач, интуицией, умением творчески мыслить. Могут встретиться такие случаи, когда осуществить прогнозирование с целью выбрать из нескольких возможных логических шажков какой-либо один (более предпочтительный) не удается. В таких случаях не остается ничего лучшего, как произвести перебор этих возможных логических шажков, т.е. искать решение, испробовав один шажок, а если это не приводит к цели, испробовать второй, третий шажок... И все же перебор – лишь крайний случай. Основой выбора пути решения (с использованием анализа, синтеза, обобщения, аналогии, интуиции) является именно прогнозирование, а не перебор. При индивидуальном решении задач учащийся молча, «про себя» осуществляет прогноз и воплощает его в решении, а иногда даже как бы не замечает скрытую работу мысли на этапе прогноза. Обсуждение процесса поиска решения и, в частности, прогнозирования решения при активном участии всего класса – мощное средство развития навыков логического мышления учащихся. Время, затрачиваемое на такую работу, не является «потерянным зря», а приводит к повышению уровня знаний по математике. Более того, достаточно подробный и обоснованный прогноз решения может в ряде случаев заменить само решение, т.е. на одну подробно решенную задачу можно 1 – 2 задачи обсуждать лишь на уровне подробного прогноза. Это дает экономию учебного времени при углублении знаний учащихся.