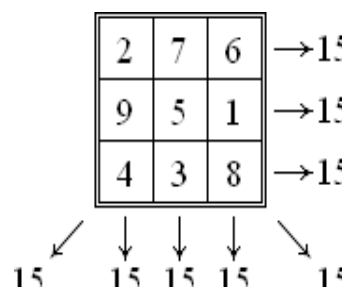


МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ И НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ ИХ ПОСТРОЕНИЯ

К.А. Астахова
ученица, МАОУ СОШ № 102,
г. Пермь

Магические квадраты имеют длинную историю, восходящую к ученым древнего Китая и Индии, которые считали количественные отношения основой сущности мира. Поэтому изучение чисел и соотношений между ними занимали величайшие умы человечества. Такие выдающиеся ученые, как Ян Хуэй, ал-Караджи, Френикль де Бэсеи, Э.Мосхопулос, А. Дюрер, К. Агриппа, Б. Френикль Л. Эйлер, Б. Франклин, Р. Болл и др. посвятили свои работы исследованию этих конструкций.

Магический или **волшебный квадрат** – это квадратная таблица $n \times n$, заполненная первыми n числами натурального ряда таким образом, что сумма чисел в каждой строке, каждом столбце и на обеих диагоналях одинакова. Эту сумму



называют **магической константой**. Она определяется формулой:

$$S = \frac{(n^2 + 1) \cdot n}{2} .$$

Числа, помещенные в ячейки квадрата, называется его **элементами**. Элементы, расположенные с левого верхнего (нижнего) угла к правому нижнему (верхнему), образуют **главную (побочную) диагональ**. Количество n клеток в основании квадрата называется его **порядком**. Соотношение между магическими константами и порядком квадрата приведены в таблице:

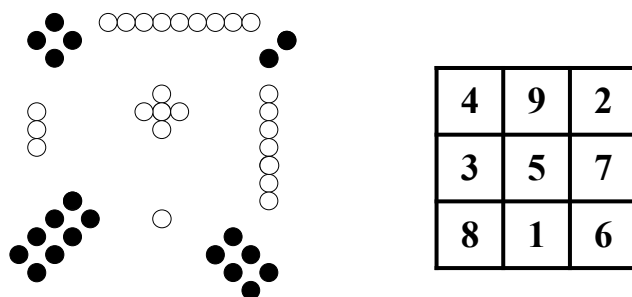
Порядок n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$S(n)$	15	34	65	111	175	260	369	505	671	870

Минимальный порядок магического квадрата – 3. При этом такой квадрат единственный, потому что все другие того же порядка могут быть получены из него поворотом вокруг центра или отображением относительно одной из осей симметрии.

Расположить натуральные числа от 1 до 9 в магический квадрат 3×3 можно 8 различными способами:

$$\begin{array}{cccc} 9+5+1=15 & 8+4+3=15 & 4+9+2=15 & 7+6+2=15 \\ 8+1+6=15 & 7+5+3=15 & 8+5+2=15 & 6+5+4=15 \end{array}$$

Известно, что магические квадраты имеют древнекитайское происхождение. Согласно легенде, во времена правления императора Ю из династии Шан (ок. 2200 до н.э.) из вод реки Ло – притока Хуанхэ (Желтой реки) – всплыла священная черепаха (в других вариантах – огромная рыба, сказочное чудовище), на панцире которой были начертаны таинственные иероглифы. Эти знаки позднее стали известны под названием ло-шу (документ реки Ло) и равносильны магическому квадрату.



Такому магическому квадрату древние китайцы придавали огромное значение. Цифра 5, стоящая в центре означала Землю, а вокруг нее в строгом равновесии располагались огонь (2 и 7), вода (1 и 6), дерево (3 и 8), металл (4 и 9). В XI в. о магических квадратах узнали в Индии, а затем в Японии, где им приписывали различные мистические свойства. Бытовало поверье, что выгравированный на серебре магический квадрат защищает от различных болезней. Квадраты 5×5 были известны еще в средние века. Мусульмане, например, очень благоговейно относились

к таким квадратам с цифрой 1 в середине крайней строки (столбца), считая их символом единства Аллаха.

Виды магических квадратов

В полумагическом квадрате суммы чисел

одинаковы только вдоль строк и столбцов.

1	6	11	16
7	4	13	10
12	15	2	5
14	9	8	3

Самый ранний уникальный

магический квадрат, обнаруженный

в индийском городе Кхаджурахо

называемым «**Дьявольским**». Это

котором с S совпадают суммы чисел

диагоналей.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

в надписи XI века

относится к так

такой квадрат, в

вдоль ломаных

Это

диагонали, каждая из которых, параллельна главной или побочной.

Такие квадраты называют ещё пандиагональными, совершенными,

полными, панмагическими, изящными, кабалистическими и др .

Методы построения магических квадратов различных порядков

Правила построения магических квадратов делятся на три категории в зависимости от того, каков порядок квадрата: нечетен, равен удвоенному или учетверенному нечетному числу. Ниже приведены простейшие методы их построения. Для описания условимся считать, что нумерация строк квадратов производится сверху вниз, начиная с первой, а столбцов - с крайнего левого.

Диагональный метод

Процесс построения квадратов нечетного порядка состоит в следующем. Число 1 помещается в среднюю клетку одной из крайних строк или столбцов. Другие числа размещаются по порядку вдоль диагонали, идущей вверх (вниз) направо (налево) от данной клетки. При этом необходимо учитывать особые случаи:

1. Если достигнута верхняя строка, то следующее число записывается в нижнюю строку так, как если бы она располагалась над первой.

2. При достижении крайнего правого столбца следующее число записывается в первый столбец, как если бы он был помещен рядом с крайним правым.

3. Если число 1 помещено в середину первой строки (столбца), то продвижение следует вести вверх. Если заполняемая клетка уже занята, то очередное число помещается под той, где расположено предшествующее.

4. Если число 1 помещено в середину последней строки (столбца), то продвижение следует вести вниз. Если заполняемая клетка уже занята, то очередное число помещается над той, где расположено предшествующее.

Построенные таким образом квадраты порядков $n=5$, $n=7$, $n=9$ имеют вид:

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9



11	18	25	2	9
10	12	19	21	3
4	6	13	20	22
23	5	7	14	16
17	24	1	8	15



30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

22	31	40	49	2	11	20
21	23	32	41	43	3	12
13	15	24	33	42	44	4
5	14	16	25	34	36	45
46	6	8	17	26	35	37
37	48	59	70	81	2	13
38	47	7	9	18	27	29
36	38	49	60	71	73	3
30	39	48	59	70	81	2
26	28	39	50	61	72	28
16	27	29	40	51	62	64
6	17	19	30	41	52	63
77	7	18	20	31	42	53
67	78	8	10	21	32	43
57	68	79	9	11	22	33
45	58	69	80	1	12	23

Метод хода коня на шахматной доске

Процесс построения квадратов нечетного порядка состоит в следующем. Число 1 помещается в любую клетку квадрата, если его порядок не является кратным 3, (в противном случае в среднюю клетку одной из крайних строк или столбцов). Другие числа размещаются по порядку буквой Г (две клетки вверх (вниз) и одна вправо (влево), либо две клетки вправо (влево) и одна вверх (вниз) от данной клетки). При этом необходимо учитывать особые случаи:

1. Если достигнута верхняя строка, то следующее число записывается в нижнюю строку так, как если бы она располагалась над первой.

2. При достижении крайнего правого столбца следующее число записывается в первый столбец, как если бы он был помещен рядом с крайним правым.

47	58	69	80	1	12	23	34	45
57	68	79	9	11	22	33	44	46
67	78	8	10	21	32	43	54	56
77	7	18	20	31	42	53	55	66
6	17	19	30	41	52	63	65	76
16	27	29	40	51	62	64	75	5
26	28	39	50	61	72	74	4	15
36	38	49	60	71	73	3	14	25
37	48	59	70	81	2	13	24	35

3. При продвижении вверх, если заполняемая клетка уже занята, то очередное число помещается под той, где расположено предшествующее.

4. При продвижении вниз, если заполняемая клетка уже занята, то очередное число помещается над той, где расположено предшествующее.

Построенные таким образом квадраты порядков $n=5$ и $n=7$ имеют вид:

18	1	14	22	10
24	7	20	3	11
5	13	21	9	17
6	19	2	15	23
12	25	8	16	4

12	3	19	10	21
18	9	25	11	2
24	15	1	17	8
5	16	7	23	14
6	22	13	4	20

19	29	46	14	24	41	2
11	28	38	6	16	33	43
3	20	30	47	8	25	42
44	12	22	39	7	17	34
36	4	21	31	48	9	26
35	45	13	25	40	1	18
27	37	5	15	32	49	10

16	33	43	11	28	38	6
24	41	2	19	29	46	14
32	49	10	27	37	5	15
40	1	18	35	45	13	23
48	9	26	36	4	21	31
7	17	34	44	12	22	39
8	25	42	3	20	30	47

«Точечный» метод арабов

Вместо точек, расположенных в диагональных клетках, записывают (при заданной нумерации) их клеточный номер, затем начиная с конца, в каждую клетку с номером x помещают дополнительное число, равное

•			•
	•	•	
	•	•	
•			•

4			1
	7	6	
	11	10	
16			13

$(n^2+1)-x$. В

результате получают
порядка $n=4, n=8, \dots$

8	58	59	5	4	62	63	1
49	15	14	52	53	11	10	56
41	23	22	44	45	19	18	48
32	34	35	29	28	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	47	46	20	21	43	42	24
9	55	54	12	13	51	50	16
64	2	3	61	60	6	7	57

магические квадраты

Литература

1. *Кордемский, Б. А.* Математическая смекалка / Б. А. Кордемский, – М.: Физматгиз, 1963. Изд. 7, перераб. – гл. 12 Магические квадраты. – с. 268 – 313.
2. *Малых, А.Е.* Магические квадраты / А.Е. Малых, – Пермь: Пермский институт повышения квалификации учителей, 1992. – 46 с.

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13