**XXI ГОРОДСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ "ЮНОСТЬ АРХАНГЕЛЬСКА"**

Направление **Математика**

# Фракталы и L-системы. Построение фракталов при помощи L-систем.

**Исследовательская работа**

Выполнена учеником 10 "А" класса муниципального бюджетного общеобразовательного учреждения муниципального образования "Город Архангельск" "Гимназия № 24"
Горбуновым Константином Дмитриевичем

Научный руководитель – учитель муниципального бюджетного общеобразовательного учреждения муниципального образования "Город Архангельск" " Гимназия № 24"
Мигунова Наталья Ивановна

**Архангельск, 2021**

# Оглавление:


I. **Введение**
II. **Фракталы**
   A. Что такое фрактал
   B. Фракталы в живой и неживой природе
   C. Примеры фракталов
   D. Размерность фракталов
   E. Применения фракталов
III. **L-системы**
   A. Что такое L-системы
   B. Для чего создавались L-системы
   C. Простейшие построения при помощи L-систем
   D. Построение фракталов с помощью L-систем
   E. Что ещё можно строить с помощью L-систем
IV. **Заключение**
V. **Библиографический список**
VI. **Приложения**

# Введение.

Недавно на уроке информатики мы изучали рекурсию, и среди всех примеров сильно заинтересовал меня лишь один – фрактал. Поспрашивав у друзей и знакомых, я узнал, что почти никто не слышал про фракталы до этого. Я понял, что у меня появился отличный шанс рассказать всем про них. Именно поэтому сегодня я представляю вам доклад на тему “Фракталы и L-системы. Построение фракталов при помощи L-систем”.

# Фракталы.

**Что такое фрактал.**
Перед тем как мы начнём изучать фракталы, следует дать им точное определение.

**Фракта́л** (лат. *fractus* — дроблёный, сломанный, разбитый) —множество, естественное и бесконечное, обладающее свойством самоподобия (объект, в точности или приближённо совпадающий с частью себя самого, то есть целое имеет ту же форму, что и одна или более частей).

Термины фрактальная размерность и фрактал были введены Мандельбротом в 1975 году, примерно через 10 лет после того, как он опубликовал свою статью о самоподобии побережья Великобритании. Мандельброт объединил и применил сложную теоретическую математику и инженерную работу в новом варианте изучения сложной геометрии.

**Фракталы в живой и неживой природе.**

После того как мы определились с тем, что такое фрактал, можно поискать их примеры в живой и неживой природе.

В живой природе:
- Кораллы
- Морские звезды и ежи
- Морские раковины
- Цветы и растения (брокколи, капуста)
- Кроны деревьев и листья растений
- Плоды (ананас)
- Система кровообращения и бронхи людей и животных

В неживой природе:
- Границы географических объектов (стран, областей, городов)
- Береговые линии
- Горные хребты
- Снежинки
- Облака
- Молнии
- Морозные узоры на оконных стёклах
- Кристаллы
- Сталактиты, сталагмиты, геликтиты

Найдя множество примеров фракталов в природе, мы можем сделать вывод о её закономерной, логичной структуре.

**Примеры фракталов.**

**Снежинка Коха**

Кривая Коха является типичным геометрическим фракталом. Процесс её построения выглядит следующим образом: берём единичный отрезок, разделяем на три равные части и заменяем средний интервал равносторонним треугольником без этого сегмента. В результате образуется ломаная, состоящая из четырёх звеньев длины 1/3. На следующем шаге повторяем операцию для каждого из четырёх получившихся звеньев и т. д… Предельная кривая и есть кривая Коха. Снежинка Коха представлена на рисунке 1.

**Треугольник Серпинского**

Треугольник Серпинского — фрактал, один из двумерных аналогов множества Кантора, математическое описание которого опубликовал польский математик Вацлав Серпинский в 1915 году. Также он известен как «салфетка» Серпинского. Середины сторон равностороннего треугольника соединяются отрезками. Получаются 4 новых треугольника. Из исходного треугольника удаляется внутренность срединного треугольника. Поступая точно так же с каждым из получившимся треугольников и продолжая этот процесс бесконечно мы получим треугольник Серпинского. Также для треугольника Серпинского существует ещё один очень интересный способ построения – методом хаоса. Для каждого из данных методов я написал программу, которая строит данный фрактал. Треугольник Серпинского представлен на рисунке 2.

**Фрактал Мандельброта**

Один из самых знаменитых фракталов, опирающийся на собственное математическое условие. Подробно разбирать его мы не будем, т.к. это очень обширная тема, разбор которой займёт очень много времени. Фрактал Мандельброта представлен на рисунке 3.

**Фрактальная размерность.**

Идея фрактальной размерности лежит в нетрадиционном представлении масштаба и размерности. Как уже было выше сказано, термин фрактальная размерность был введен Мандельбротом в 1975 году. Чтобы понять фрактальную размерность, взглянем чуть иначе на обычную, понятную нам размерность. На рисунке 4 представлены: одномерный объект – прямая, двумерный – квадрат и трёхмерный – куб. Теперь уменьшим каждый из них в два раза (т.е. у прямой уменьшим в два раза длину, у квадрата – ширину и высоту, у куба – длину, ширину и высоту) и посмотрим сколько новых (уменьшенных) фигур понадобится, чтобы составить из них первоначальные версии фигур

Для прямой нам понадобятся две уменьшенные фигуры, т.е. $2^1$ значит, эту фигуру мы будем называть одномерной.

Для квадрата нам понадобятся четыре уменьшенные фигуры, т.е. $2^2$, такую фигуру мы назовём двумерной.

Для куба нам понадобятся восемь уменьшенных фигур, т.е. $2^3$, эта фигура будет трёхмерной.

Так же можно находить размерность фракталов, правда зачастую там придётся сталкиваться с логарифмами.

Вот примеры размерности некоторых фракталов:

Треугольник Серпинского $\log_2 3 \approx 1{,}584962$ мерный

Снежинка Коха $\log_3 4 \approx 1{,}261859$ мерная

Береговая линия Британии 1,21 мерная

**Применение фракталов**

- Естественные науки
  В физике фракталы естественным образом возникают при моделировании нелинейных процессов, таких как турбулентное течение жидкости, сложные процессы диффузии-адсорбции, пламя, облака и тому подобное. Фракталы используются при моделировании пористых материалов, например, в нефтехимии. В биологии они применяются для моделирования популяций и для описания систем внутренних органов (система кровеносных сосудов). После создания кривой Коха было предложено использовать её при вычислении протяжённости береговой линии.
- Радиотехника
  Фрактальные антенны
- Информатика
  Сжатие изображений
  Компьютерная графика
  Децентрализованные сети

## L-системы

**Что такое L-системы**

**L-система** или **система Линденмайера** — это параллельная система переписывания и вид формальной грамматики. L-система состоит из алфавита символов, которые могут быть использованы для создания строк, набора порождающих правил, которые задают правила подстановки вместо каждого символа, начальной строки («аксиомы»), с которой начинается построение, и механизма перевода образованной строки в геометрические структуры. L-системы предложил и развивал в 1968 Аристид Линденмайер, венгерский биолог и ботаник из Утрехтского университета. Рекурсивная природа правил L-системы приводит к самоподобию и потому подобные фракталам формы легко описываются с помощью L-системы. Модели растений и выглядящие естественно органические формы легко сформировать, так как при увеличении уровня рекурсии модель медленно «растёт» и становится более сложной. Системы Линденмайера популярны также в генерации искусственной жизни.

**Для чего создавались L-системы**

В качестве биолога Линденмайер работал с дрожжами и нитевидными грибами и изучал схемы роста различных видов водорослей, таких как сине-зеленые водоросли Anabaena catenula. Первоначально L-системы были разработаны для формального описания развития таких простых многоклеточных организмов и для иллюстрации связи между соседними клетками растения. Позже система была расширена для описания высших растений и сложных ветвящихся структур, а ещё позже с её помощью стали строить фракталы. Следовательно, с генерацией растений она справляется также хорошо, как и с генерацией фракталов.

**Простейшие построения при помощи L-систем**

Водоросли
Оригинальная L-система Линденмайера для моделирования роста водорослей.
переменные: A B
константы: нет
аксиома: A
правила: (A → AB), (B → A)

A
AB
ABA
ABAAB
ABAABABA
ABAABABAABAAB
ABAABABAABAABABAABABA
ABAABABAABAABABAABABAABAABABAABAAB

Результаты для 0-7 итераций

**Построение фракталов с помощью L-систем**

Пример 1: Треугольник Серпинского
переменные: A B
константы: + −
старт: A
правила: (A → B−A−B), (B → A+B+A)
угол: 60°
Результаты для 2, 4, 6, 8 итераций представлены на рисунке 5.

Пример 2: Кривая Коха
переменные: F
константы: + −
старт: F
правила: (F → F+F−F−F+F)
угол: 90°
Результаты для 0, 1, 2, 3 итераций представлены на рисунке 6.

Пример 3: Кривая дракона
переменные: X Y
константы: F + −
старт: FX
правила: (X → X+YF+), (Y → −FX−Y)
угол: 90°
Результат для 10 итераций представлен на рисунке 7.

**Что ещё можно строить с помощью L-систем**

С помощью L-систем можно с легкостью построить фотореалистичные растения. Чтобы наглядно это доказать, я написал программу, которая строит дерево. Ниже представлена ещё одна L-система, которая строит другое реалистичное растение.

Пример 4: Трава
переменные: X F
константы: + − [ ]
старт: X
правила: (X → F−[[X]+X]+F[+FX]−X), (F → FF)
угол: 25°
Результат для 6 итераций представлен на рисунке 8.

## Заключение.

Опираясь на проделанную работу, мы можем сделать вывод, что фракталы не просто интересное и завораживающее явление в математике, а очень перспективное направление, которое может пригодиться в различных направлениях. Не смотря на то, что фракталы на данный момент изучены не полностью, виднеются огромные перспективы в развитии данного направления.

## Библиографический список


- Мандельброт Б. “Фрактальная геометрия природ”
- Маврикиди Ф. И. “Фракталы: постигая взаимосвязанный мир”
- Мандельброт Б. “Какова длина побережья Великобритании?”

## Приложения

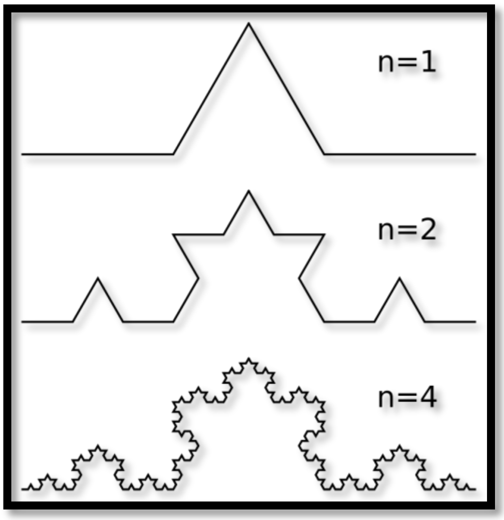


Рисунок 1

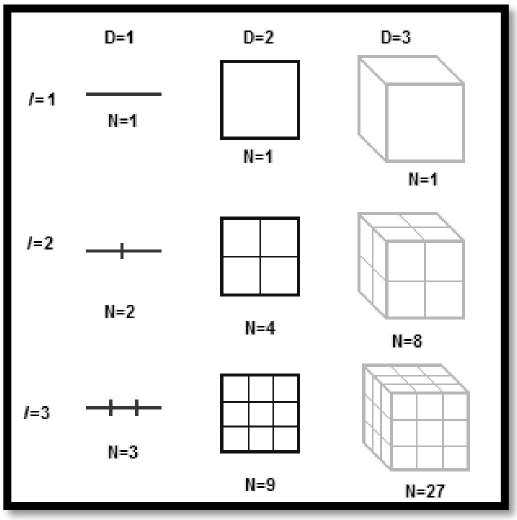


Рисунок 4

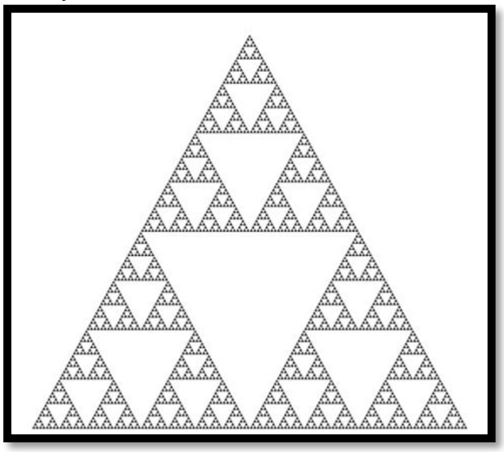

Рисунок 2

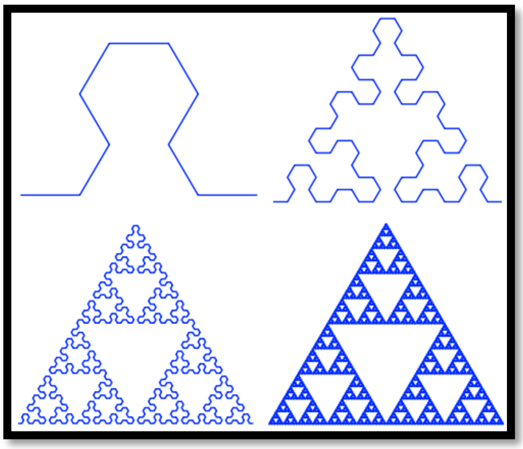

Рисунок 5

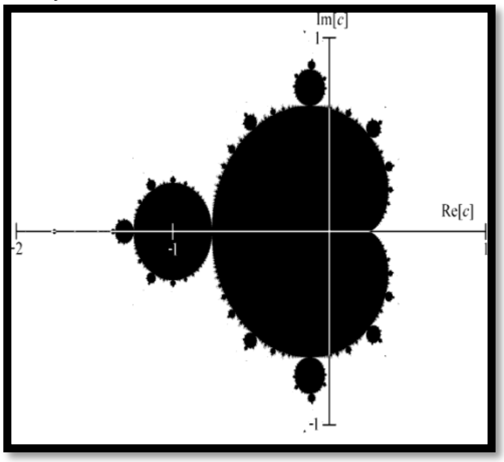


Рисунок 3

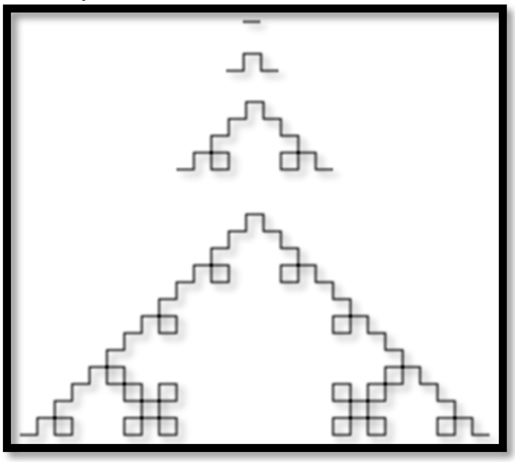

Рисунок 6

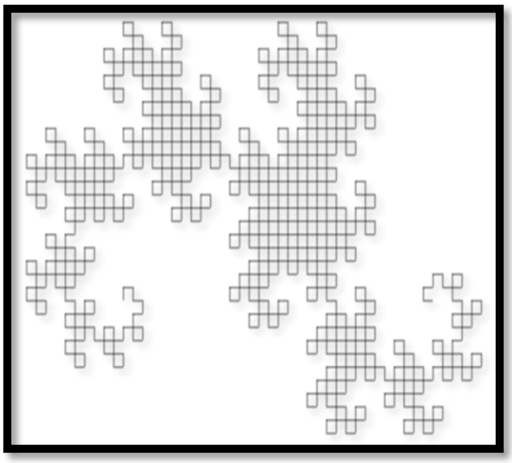
Рисунок 7


Рисунок 8