

ОГАПОУ

Белгородский политехнический колледж

Дисциплина: «Математика»

Тема работы:

«Золотое сечение»



Автор: Бессонов Кирилл

Руководитель: Давиденко И.А.
Преподаватель математики

Содержание.

1. Введение.
2. Понятие о золотом сечении.
3. История золотого сечения.
4. Золотое сечение в математике.
5. Золотое сечение в живописи, архитектуре, музыке, поэзии.
6. Золотое сечение в живой природе.
7. Заключение.
8. Литература.

*Геометрия владеет двумя сокровищами:
одно из них — это теорема Пифагора, а другое —
деление отрезка в среднем и крайнем отношении.*

И. Кеплер (1571—1630)

Введение

Человек различает окружающие его предметы по форме. Интерес к форме какого-либо предмета может быть продиктован жизненной необходимостью, а может быть вызван красотой формы. Форма, в основе построения которой лежат сочетание симметрии и золотого сечения, способствует наилучшему зрительному восприятию и появлению ощущения красоты и гармонии. Целое всегда состоит из частей, части разной величины находятся в определенном отношении друг к другу и к целому. Принцип золотого сечения – высшее проявление структурного и функционального совершенства целого и его частей в искусстве, науке, технике и природе.

Понятие о золотом сечении

В математике *пропорцией* (лат. proportio) называют равенство двух отношений:

$$a : b = c : d$$

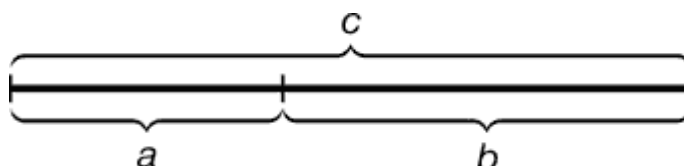
Отрезок прямой AB можно разделить на две части следующими способами:

- на две равные части – $AB : AC = AB : BC$;
- на две неравные части в любом отношении (такие части пропорции не образуют);
- таким образом, когда $AB : AC = AC : BC$.

Последнее и есть золотое деление или деление отрезка в крайнем и среднем отношении.

Золотое сечение – это такое пропорциональное деление отрезка на неравные части, при котором весь отрезок так относится к большей части, как сама большая часть относится к меньшей; или другими словами, меньший отрезок так относится к большему, как больший ко всему

$$a : b = b : c \text{ или } c : b = b : a.$$



Геометрическое изображение золотой пропорции

Практическое знакомство с золотым сечением начинают с деления отрезка прямой в золотой пропорции с помощью циркуля и линейки.

Деление отрезка прямой по золотому сечению. $BC = 1/2 AB$; $CD = BC$
 Из точки B восставляется перпендикуляр, равный половине AB . Полученная точка C соединяется линией с точкой A . На полученной линии откладывается отрезок BC , заканчивающийся точкой D . Отрезок AD переносится на прямую AB . Полученная при этом точка E делит отрезок AB в соотношении золотой пропорции.

Отрезки золотой пропорции выражаются бесконечной иррациональной дробью $AE = 0,618\dots$, если AB принять за единицу, $BE = 0,382\dots$. Для практических целей часто используют приближенные значения 0,62 и 0,38. Если отрезок AB принять за 100 частей, то большая часть отрезка равна 62, а меньшая – 38 частям.

Свойства золотого сечения описываются уравнением:

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Решение этого уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Свойства золотого сечения создали вокруг этого числа романтический ореол таинственности и чуть ли не мистического поклонения.

Золотое сечение (золотая пропорция, деление в крайнем и среднем отношении) — деление непрерывной величины на две части в таком отношении, при котором меньшая часть так относится к большей, как большая ко всей величине.

Принцип золотого сечения используется при нахождении максимально уравновешенных пропорций между архитектурными частями зданий.

История золотого сечения

Понятие о золотом делении ввел в научный обиход Пифагор, древнегреческий философ и математик (VI в. до н.э.). Есть предположение, что Пифагор свое знание золотого деления позаимствовал у египтян и вавилонян. И действительно, пропорции пирамиды Хеопса, храмов, барельефов, предметов быта и украшений из гробницы Тутанхамона свидетельствуют, что египетские мастера пользовались соотношениями золотого деления при их создании. Французский архитектор Ле Корбюзье нашел, что в рельефе из храма фараона Сети I в Абидосе и в рельефе, изображающем фараона Рамзеса, пропорции фигур соответствуют величинам золотого деления. Зодчий Хесира, изображенный на рельефе деревянной доски из гробницы его имени, держит в руках измерительные инструменты, в которых зафиксированы пропорции золотого деления. Греки были искусными геометрами. Даже арифметике обучали своих детей при помощи геометрических фигур. Квадрат Пифагора и диагональ этого квадрата были основанием для построения динамических прямоугольников. Платон (427...347 гг. до н.э.) также знал о золотом делении. Его диалог “Тимей” посвящен математическим и эстетическим воззрениям школы Пифагора и, в частности, вопросам золотого деления. В фасаде древнегреческого храма Парфенона присутствуют золотые пропорции. При его раскопках обнаружены циркули, которыми пользовались архитекторы и

скульпторы античного мира. В Помпейском циркуле (музей в Неаполе) также заложены пропорции золотого деления. В дошедшей до нас античной литературе золотое деление впервые упоминается в “Началах” Евклида. Во 2-й книге “Начал” дается геометрическое построение золотого деления. После Евклида исследованием золотого деления занимались Гипсикл (II в. до н.э.), Папп (III в. н.э.) и др. В средневековой Европе с золотым делением познакомились по арабским переводам “Начал” Евклида. Переводчик Дж. Кампано из Наварры (III в.) сделал к переводу комментарии. Секреты золотого деления ревностно оберегались, хранились в строгой тайне. Они были известны только посвященным.

В эпоху Возрождения усилился интерес к золотому делению среди ученых и художников в связи с его применением в геометрии, в искусстве, в архитектуре. Леонардо да Винчи, художник и ученый, начал писать книгу по геометрии, но в это время появилась книга монаха Луки Пачоли, и Леонардо оставил свою затею. По мнению современников и историков науки, Лука Пачоли был настоящим светилом, величайшим математиком Италии в период между Фибоначчи и Галилеем. Лука Пачоли был учеником художника Пьеро делла Франчески, написавшего две книги, одна из которых называлась “О перспективе в живописи”. Его считают творцом начертательной геометрии.

Лука Пачоли прекрасно понимал значение науки для искусства. В 1496 г по приглашению герцога Моро он приезжает в Милан, где читает лекции по математике. В Милане при дворе Моро в то время работал и Леонардо да Винчи. В 1509 г. в Венеции была издана книга Луки Пачоли “Божественная пропорция” с блестяще выполненными иллюстрациями, полагают, что их сделал Леонардо да Винчи. Книга была восторженным гимном золотой пропорции. Среди многих достоинств золотой пропорции монах Лука Пачоли не преминул назвать и ее “божественную суть” как выражение божественного триединства бог сын, бог отец и бог дух святой (подразумевалось, что малый отрезок есть олицетворение бога сына, больший отрезок – бога отца, а весь отрезок – бога духа святого).

Леонардо да Винчи уделял много внимания изучению золотого деления. Он производил сечения стереометрического тела, образованного правильными пятиугольниками, и каждый раз получал прямоугольники с отношениями сторон в золотом делении. Поэтому он дал этому делению название золотое сечение. Так оно и держится до сих пор как самое популярное.

В то же время на севере Европы, в Германии, над теми же проблемами трудился Альбрехт Дюрер. Он делает наброски введения к первому варианту трактата о пропорциях. Дюрер пишет. “Необходимо, чтобы тот, кто что-либо умеет, обучил этому других, которые в этом нуждаются. Это я и вознамерился сделать”.

Альбрехт Дюрер подробно разрабатывает теорию пропорций человеческого тела. Важное место в своей системе соотношений Дюрер отводил золотому сечению. Рост человека делится в золотых пропорциях линией пояса, а также линией, проведенной через кончики средних пальцев опущенных рук, нижняя часть лица – ртом и т.д. Известен пропорциональный циркуль Дюрера.

Великий астроном XVI в. Иоган Кеплер назвал золотое сечение одним из сокровищ геометрии. Он первый обращает внимание на значение золотой пропорции для ботаники (рост растений и их строение).

Кеплер называл золотую пропорцию продолжающей саму себя “Устроена она так, – писал он, – что два младших члена этой нескончаемой пропорции в сумме дают третий член, а любые два последних члена, если их сложить, дают следующий член, причем та же пропорция сохраняется до бесконечности”.

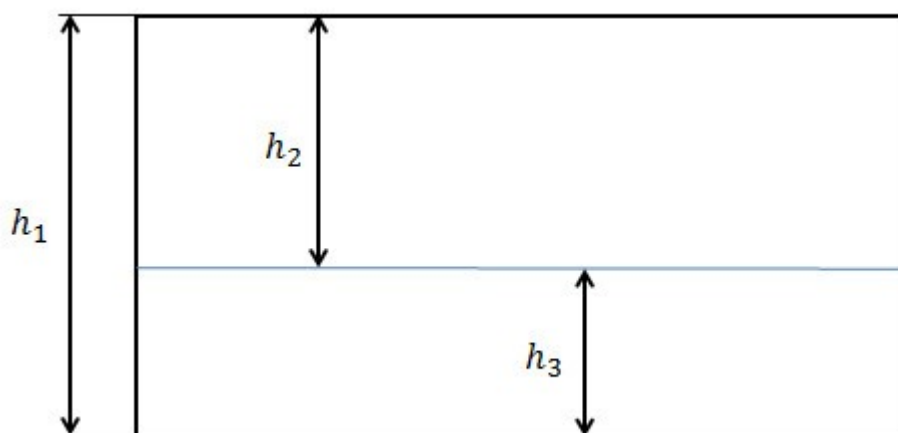
Золотое сечение в математике

Золотое сечение – это такое пропорциональное деление отрезка на неравные части, при котором весь отрезок так относится к большей части, как сама большая часть относится к меньшей; или другими словами, меньший отрезок так относится к большему, как больший ко всему отрезку.

Пропорции золотого сечения часто используются художниками и скульпторами в соотношениях между разными элементами картины или скульптуры. Великий Леонардо да Винчи находил соотношение золотого сечения в пропорциях человеческого тела.

Так чему же равно отношение **золотого сечения в математике** и как его найти? Разберёмся на примере.

Возьмём лист бумаги и начертим линию горизонта, которая обычно делит небо от земли. Получится, нечто похожее на рисунок ниже.



Отношение высоты картины (h_1) к расстоянию от верхнего края (h_2) равно отношению расстояния от верхнего края (h_2) к расстоянию до нижнего края (h_3). В виде математической записи, это будет выглядеть так:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{h_2}{h_3}$$

Найдём числовое значение золотого сечения.

Для этого вернёмся к нашему рисунку. Пусть высота всей картины равна 1 ($h_1 = 1$), а расстояние от верхнего края до горизонта обозначим за x ($h_2 = x$). Тогда получим:

$$1 : x = x : (1 - x)$$

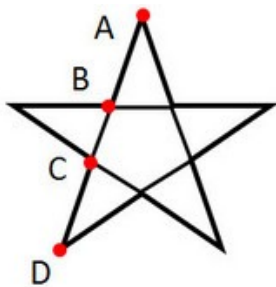
$$x^2 - x - 1 = 0$$

Положительный корень этого уравнения $(\sqrt{5} + 1) / 2 \approx 1,618\dots$. Это отношение большей части к меньшей в этой пропорции.

Это число равно отношению золотого сечения. Обычно его обозначают греческими буквами τ (тау) или ϕ (фи).

Золотое сечение в фигурах

В некоторых фигурах геометрии и стереометрии также присутствует золотое сечение. Например, в пятиконечной звезде (пентаграмме).

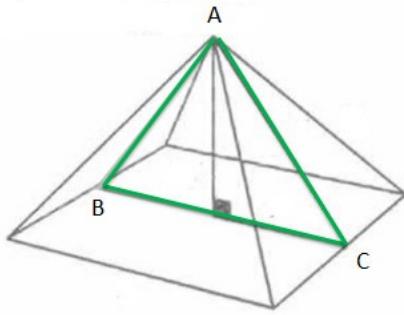


Точка В или С делит отрезок AD в пропорциях золотого сечения. Все остальные стороны звезды также поделены в данном соотношении соответственно.

Другой пример золотого сечения был обнаружен в пирамиде Хеопса.



В сечении знаменитого сооружения также заложен принцип золотого сечения.



Сумма двух сторон равнобедренного треугольника ABC относится к его основанию также как сумма всех сторон треугольника к сумме равных сторон.

Иными словами:

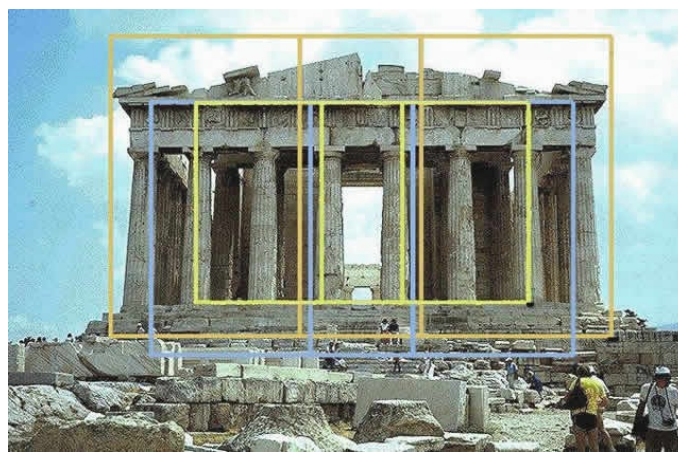
$$\frac{AB+BC}{BC} = \frac{AB+AC+BC}{AB+BC}$$

«Золотое сечение» в живописи, архитектуре, музыке, поэзии

Золотое сечение в скульптуре

Известно, что еще в древности основу скульптуры составляла теория пропорций. Отношения частей человеческого тела связывались с формулой золотого сечения. Пропорции “золотого сечения” создают впечатление гармонии красоты, поэтому скульпторы использовали их в своих произведениях. Скульпторы утверждают, что талия делит совершенное человеческое тело в отношении “золотого сечения”. Так знаменитая статуя Аполлона Бельведерского состоит из частей, делящихся по золотым отношениям. Великий древнегреческий скульптор Фидий часто использовал “золотое сечение” в своих произведениях. Самыми знаменитыми из них были статуя Зевса Олимпийского (которая считалась одним из чудес света) и Афины Парфенос.

Золотое сечение в архитектуре

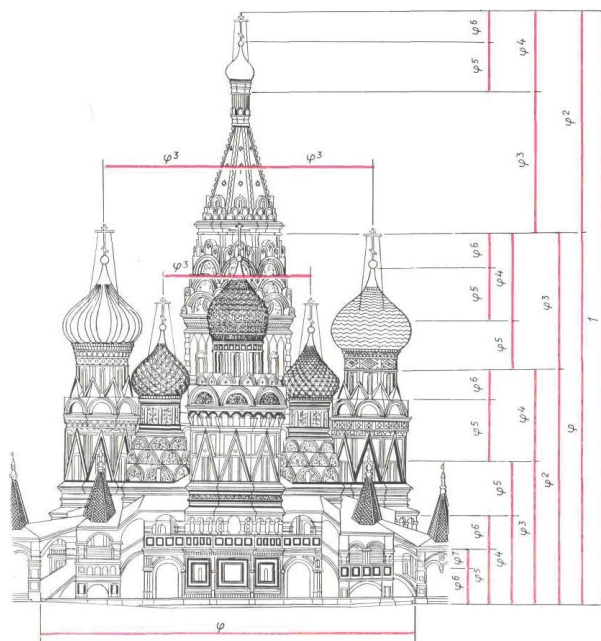


“Золотое сечение” дает наиболее спокойное соотношение размеров тех или иных длин.

Одним из красивейших произведений древнегреческой архитектуры является Парфенон (V в. до н. э.). Парфенон имеет 8 колонн по коротким сторонам и 17 по длинным. выступы сделаны целиком из квадратов пентилейского мрамора. Отношение высоты здания к его длине равно 0,618. Если произвести деление Парфенона по “золотому сечению”, то получим те или иные выступы фасада.

Известный русский архитектор М. Казаков в своем творчестве широко использовал “золотое сечение”. Его талант был многогранным, но в большей степени он раскрылся в многочисленных осуществленных проектах жилых домов и усадеб. “Золотое сечение” можно обнаружить в архитектуре здания сената в Кремле. По проекту М. Казакова в Москве была построена Голицынская больница, которая в настоящее время называется Первой клинической больницей имени Н.И. Пирогова.

Еще один архитектурный шедевр Москвы – дом Пашкова – является одним из наиболее совершенных произведений архитектуры В. Баженов.



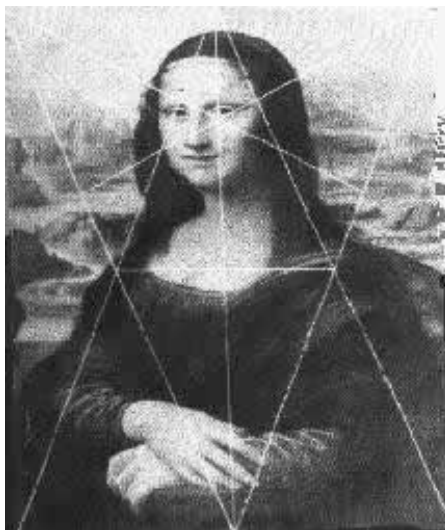
Золотое сечение в живописи

Сам Леонардо да Винчи говорил: “Пусть никто, не будучи математиком, не дерзнет читать мои труды”.



Нет сомнений, что Леонардо да Винчи был великим художником, это признавали уже его современники, но его личность и деятельность останутся покрытыми тайной, так как он оставил потомкам не связное изложение своих идей, а лишь многочисленные рукописные наброски, заметки, в которых говорится “обо всем на свете”. Он писал справа налево неразборчивым почерком и левой рукой. Это самый известный из существующих образец зеркального письма.

Портрет Монны Лизы (Джоконды) долгие годы привлекает внимание исследователей, которые обнаружили, что композиция рисунка основана на золотых треугольниках, являющихся частями правильного звездчатого пятиугольника.



Однажды Леонардо да Винчи получил заказ от банкира Франческо де ле Джокондо написать портрет молодой женщины, жены банкира, Монны Лизы. Женщина не была красива, но в ней привлекала простота и естественность облика. Леонардо согласился писать портрет. Его модель была печальной и грустной, но Леонардо рассказал ей сказку, услышав которую, она стала живой и интересной.

Золотое сечение в картине И. И. Шишкина "Сосновая роща"

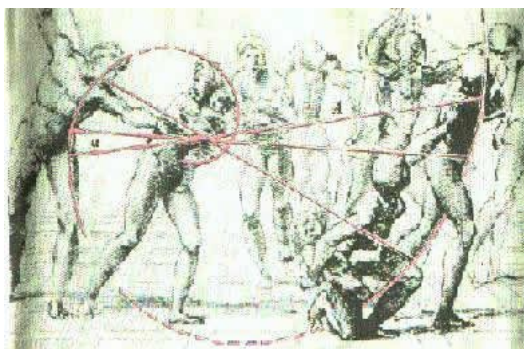
На этой картине И. И. Шишкина просматриваются мотивы золотого сечения. Ярко освещенная солнцем сосна (стоящая на первом плане) делит длину картины по золотому сечению. Справа от сосны - освещенный солнцем пригорок. Он делит по золотому сечению правую часть картины по горизонтали. Слева от главной сосны находится множество сосен - при желании можно с успехом продолжить деление картины по золотому сечению и дальше.

Наличие в картине ярких вертикалей и горизонталей, делящих ее в отношении золотого сечения, придает ей характер уравновешенности и спокойствия, в соответствии с замыслом художника. Когда же замысел художника иной, если, скажем, он создает картину с бурно развивающимся действием, подобная геометрическая схема композиции (с преобладанием вертикалей и горизонталей) становится неприемлемой.



В отличие от золотого сечения ощущение динамики, волнения проявляется, в другой простой геометрической фигуре - спирали. Многофигурная композиция, выполненная в 1509 - 1510 годах Рафаэлем, когда прославленный живописец создавал свои фрески в Ватикане, как раз отличается динамизмом и драматизмом сюжета. Рафаэль так и не довел свой замысел до завершения, однако, его эскиз был гравирован неизвестным итальянским графиком Маркантинио Раймонди, который на основе этого эскиза и создал гравюру "Избиение младенцев".

На подготовительном эскизе Рафаэля проведены красные линии, идущие от смыслового центра композиции - точки, где пальцы воина сомкнулись вокруг лодыжки ребенка, - вдоль фигур ребенка, женщины, прижимающей его к себе, воина с занесенным мечом и затем вдоль фигур такой же группы в правой части эскиза. Если естественным образом соединить эти куски кривой пунктиром, то с очень большой точностью получается ...золотая спираль! Это можно проверить, измеряя отношение длин отрезков, высекаемых спиралью на прямых, проходящих через начало кривой.



Золотая спираль в картине Рафаэля "Избиение младенцев"

Раймонди: арка моста, идущая от головы женщины, - в левой части композиции и лежащее тело ребенка - в ее центре. Первоначальную композицию Рафаэль выполнил в расцвете своих творческих сил, когда он создавал свои наиболее совершенные творения.

«Золотое сечение» в музыке

Весь огромный звукоряд делится на три основные регистра: низкий, средний и высокий, и составляют его 88 звуков. Казалось бы, что их так немного. Но из этих 88 звуков созданы грандиозные симфонии, оратории, величайшие музыкальные творения.

В композиции многих музыкальных произведений отмечается наличие некоторого «кульминационного взлета», высшей точки, причем такое построение характерно не только для произведения в целом, но и для его отдельных частей. Такая высшая точка крайне редко расположена в центре произведения или его композиционной части, обычно она смещена, асимметрична. Изучая восьмитактные мелодии Бетховена, Шопена, Скрябина, советский музыковед Л.Мазель установил, что во многих из них вершина, или высшая точка, приходится на сильную долю шестого такта или на последнюю мелкую долю пятого такта, т.е. находится в точке золотого сечения. По мнению Л.Мазеля, число подобных восьмитактов, где подъем мелодии занимает пять тактов, а последующий спуск – три, необычайно велико. Их можно без труда найти почти у каждого автора, сочинявшего музыку в гармоническом стиле.

Принципы формообразования в природе

Все, что приобретало какую-то форму, образовывалось, росло, стремилось занять место в пространстве и сохранить себя. Это стремление находит осуществление в основном в двух вариантах – рост вверх или расстилание по поверхности земли и закручивание по спирали. Раковина закручена по спирали. Если ее развернуть, то получается длина, немного уступающая длине змеи. Небольшая десятисантиметровая раковина имеет спираль длиной 35 см. Спирали очень распространены в природе.

Представление о золотом сечении будет неполным, если не сказать о спирали.

Форма спирально завитой раковины привлекла внимание Архимеда. Он изучал ее и вывел уравнение спирали. Спираль, вычерченная по этому уравнению, называется его именем. Увеличение ее шага всегда равномерно. В настоящее время спираль Архимеда широко применяется в технике.

Еще Гете подчеркивал тенденцию природы к спиральности. Винтообразное и спиралевидное расположение листьев на ветках деревьев подметили давно. Спираль увидели в расположении семян подсолнечника, в шишках сосны, ананасах, кактусах и т.д. Совместная работа ботаников и математиков пролила свет на эти удивительные явления природы. Выяснилось, что в расположении листьев на ветке, семян подсолнечника, шишек сосны проявляется ряд Фибоначчи, а стало быть, проявляется закон золотого сечения. Паук плетет паутину спиралеобразно. Спиралью закручивается ураган. Испуганное стадо северных оленей разбегается по спирали. Молекула ДНК закручена двойной спиралью. Гете называл спираль “кривой жизни”.

Среди придорожных трав растет ничем не примечательное растение – цикорий. Приглядимся к нему внимательно. От основного стебля образовался отросток. Тут же расположился первый листок. Отросток делает сильный выброс в пространство, останавливается, выпускает

листок, но уже короче первого, снова делает выброс в пространство, но уже меньшей силы, выпускает листок еще меньшего размера и снова выброс. Если первый выброс принять за 100 единиц, то второй равен 62 единицам, третий – 38, четвертый – 24 и т.д. Длина лепестков тоже подчинена золотой пропорции. В росте, завоевании пространства растение сохраняло определенные пропорции. Импульсы его роста постепенно уменьшались в пропорции золотого сечения. В ящерице с первого взгляда улавливаются приятные для нашего глаза пропорции – длина ее хвоста так относится к длине остального тела, как 62 к 38.

И в растительном, и в животном мире настойчиво пробивается формообразующая тенденция природы – симметрия относительно направления роста и движения. Здесь золотое сечение проявляется в пропорциях частей перпендикулярно к направлению роста. Природа осуществила деление на симметричные части и золотые пропорции. В частях проявляется повторение строения целого.

Пьер Кюри в начале нашего столетия сформулировал ряд глубоких идей симметрии. Он утверждал, что нельзя рассматривать симметрию какого-либо тела, не учитывая симметрию окружающей среды. Закономерности “золотой” симметрии проявляются в энергетических переходах элементарных частиц, в строении некоторых химических соединений, в планетарных и космических системах, в генных структурах живых организмов. Эти закономерности, как указано выше, есть в строении отдельных органов человека и тела в целом, а также проявляются в биоритмах и функционировании головного мозга и зрительного восприятия.

Вывод. Прделав данную работу, я убедился в том, что использование «золотого сечения» актуально всегда. В работе представлены доказательства истории развития и использования золотого сечения в разные эпохи. Работая над проектом, я пришел к выводу, что красота таинственна, разнообразна и окружает нас повсюду, но вся она поддается одним и тем же законам, знание и применение которых делает нас и жизнь прекраснее.

Литература.

1. Ковалев Ф.В. Золотое сечение в живописи. К.: Высшая школа, 1989.
2. Кеплер И. О шестиугольных снежинках. – М., 1982.
3. Дюрер А. Дневники, письма, трактаты – Л., М., 1957
4. Азевич А.И. Двадцать уроков гармонии - Москва, изд-во «Школа-Пресс», 1998
5. Виленкин Н.Я. За страницами учебника математики – Москва, изд-во «Просвещение», 2007 год.
6. <http://www.goldenmuseum.com/>
7. http://world.lib.ru/s/shakirow_d_s/zolotoececzenie.shtml